



# Evaluación numérica de una combinación de métodos IMEX y diferencias finitas para la solución del modelo BCRE

## Numerical evaluation of a combination of IMEX and finite difference methods for the solution of the BCRE model

DARWIN E. QUIROZ<sup>1</sup>, IVAN Y. HENRÍQUEZ<sup>2</sup>

Recibido: 15 de marzo de 2023 / Aceptado: 23 de febrero de 2024

<sup>1</sup>Departamento de Matemática Aplicada,  
Escuela de Matemática y Ciencias de la  
Computación. Universidad Nacional Autónoma  
de Honduras. [darwin.quiroz@unah.edu.hn](mailto:darwin.quiroz@unah.edu.hn)

<sup>2</sup>Departamento de Matemática Aplicada,  
Escuela de Matemática y Ciencias de la  
Computación. Universidad Nacional Autónoma  
de Honduras. [ivan.henriquez@unah.edu.hn](mailto:ivan.henriquez@unah.edu.hn)

### RESUMEN

En este trabajo presentamos una comparación numérica de métodos de integración en tiempo utilizando como discretización espacial el método de diferencias finitas para aproximar la solución de un par de ecuaciones diferenciales parciales acopladas que modelan la dinámica de la superficie de una pila de arena. Dada la naturaleza no lineal de las ecuaciones del modelo, además de poseer términos de difusión, la integración en tiempo requiere un mayor costo computacional al aplicar esquemas totalmente explícitos o totalmente implícitos, debido a esto, se realiza un estudio de esquemas que combinan los métodos implícitos y métodos explícitos los cuales muestran una reducción del costo computacional manteniendo la precisión. Para cada método se verificó la tasa de convergencia teórica. En los esquemas LI-IMEX se obtuvo una mejora considerable en el tiempo de ejecución.

### ABSTRACT

In this paper we present a numerical comparison of time integration methods using the finite difference method as spatial discretization to approximate the solution of a pair of coupled partial differential equations that model the dynamics of a sand pile surface. Given the non-linear nature of the model equations, in addition to having diffusion terms, time integration requires a higher computational cost when applying totally explicit or totally implicit schemes, due to this, a study of schemes that combine the methods is carried out. implicit and explicit methods which show a reduction in computational cost while maintaining precision. For each method, the theoretical convergence rate was verified. In the LI-IMEX schemes, a considerable improvement in execution time was obtained.

### PALABRAS CLAVES

pilas de arena, modelo BCRE, método de diferencias finitas, métodos IMEX y LI-IMEX.

### KEYWORDS

\* Esta obra está bajo una licencia Creative Commons Reconocimiento - NoComercial 4.0 Internacional (cc) (i) (nc)

\* This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License. (cc) (i) (nc)

sand piles, BCRE model, finite difference method, IMEX and LI-IMEX methods

## I | INTRODUCCIÓN

Diferentes modelos han sido propuestos para describir la dinámica de las pilas de arena, estos se centran en la descripción de la evolución temporal de la altura y las avalanchas. Uno de los primeros modelos fue propuesto en (Bak, Tang, y Wiesenfeld, 1987), este es conocido como el modelo BTW y tales dinámicas son descritas a partir de varias reglas simples con las cuales se define un autómata celular, es decir, el modelo es discreto tanto en espacio como en tiempo. Basado en el modelo BTW en (Hwa y Kardar, 1992) proponen un modelo continuo para describir la evolución temporal de la pila de arena, el cual consiste en una ecuación de transporte construida a partir de ciertas condiciones.

Siguiendo el enfoque de (Hwa y Kardar, 1992), en (Bouchaud, Cates, Ravi Prakash, y Edwards, 1994) proponen un modelo continuo tanto en espacio como en tiempo con dos grados de libertad para modelar la dinámica de las superficies de pilas de arena, estos dos grados de libertad están relacionados con la altura y las avalanchas. Dicho modelo es conocido como el modelo BCRE y consiste en un sistema de dos ecuaciones diferenciales parciales no lineales de segundo orden, las cuales describen la evolución temporal tanto de la altura como de las avalanchas.

Se han realizado diferentes modificaciones o simplificaciones al modelo BCRE con el objetivo de abordar diferentes escenarios de la pila de arena (Alamino y Prado, 2002; Aradian, Raphaël, y de Gennes, 1999; Boutreux, Raphaël, y de Gennes, 1998; de Gennes, 2006). En (Emig, Claudin, y Bouchaud, 2000) se presenta una simplificación en la cual se obtuvieron soluciones analíticas para un escenario específico. Debido a la naturaleza no lineal de las ecuaciones del modelo resulta difícil obtener soluciones analíticas para analizar escenarios más generales. Es por esto que optar por un esquema numérico para aproximar las soluciones del modelo resulta factible.

Los esquemas numéricos para aproximar la solución del modelo BCRE comúnmente utilizan el método de diferencias finitas como discretización espacial (Alamino y Prado, 2002; Bouchaud y cols., 1994), el uso de este método resulta ideal debido a la facilidad de su implementación y formulación, en cuanto a la integración en tiempo es posible aplicar diferentes enfoques, por lo que una comparación de este tipo de discretizaciones espaciales en combinación con diferentes métodos de integración en tiempo resulta de interés.

Es bien conocido que problemas de valor inicial (PVI) que involucran términos rígidos, establecen una severa restricción en el paso en tiempo al integrar mediante esquemas numéricos explícitos. Algunos ejemplos de este tipo de PVI son los que provienen de modelos de convección-difusión y difusión-reacción, esto se debe a que procesos físicos como la difusión y la reacción producen términos rígidos. En este caso, los métodos Implícito-Explícito (IMEX) podrían requerir un paso en tiempo menos restrictivo en comparación a un esquema totalmente explícito. Esto se logra al aplicar un esquema implícito a los términos rígidos y un esquema explícito a los términos no rígidos, combinando así las ventajas de ambos esquemas (Ascher, Ruuth, y Spiteri, 1997). Para problemas de difusión-reacción no lineal, en (Castillo y Henríquez, 2017) se realizó un estudio del desempeño de los métodos IMEX junto con el método "Local Discontinuous Galerkin" (LDG) como discretización espacial. Es importante remarcar que la aplicación de los métodos IMEX en modelos donde el término rígido es lineal, la aplicación del esquema implícito requiere la solución de un sistema de ecuaciones lineales en cada etapa de tiempo. En cambio, para un término rígido no lineal, este requiere la solución de un sistema de ecuaciones no lineales, el cual genera un costo computacional mayor. Debido a esto, para casos particulares de términos rígidos no lineales, en (Boscarino, Bürger, Mulet, Russo, y Villada, 2015) se

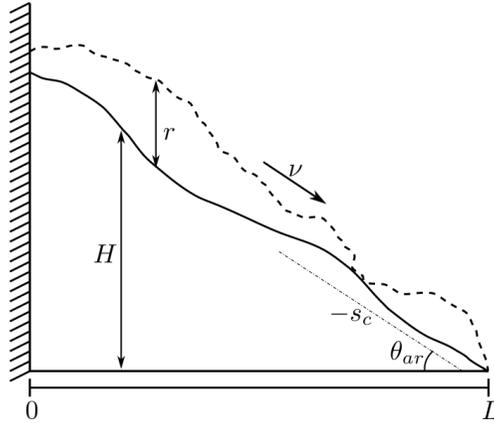


Figura 1: Descripción de la altura y una avalancha en una pila de arena con el modelo BCRE.

analiza una variante de los métodos IMEX conocidos como métodos linealmente implícitos IMEX. Recientemente, estos métodos han sido aplicados con éxito en la solución numérica de diferentes modelos, a saber, modelado de sedimentación polidispersa (Boscarino, Bürger, Mulet, Russo, y Villada, 2016), modelo de propagación de incendios forestales (Bürger, Gavilán, Inzunza, Mulet, y Villada, 2020) y la ecuación no lineal de Fokker-Planck para fermiones y bosones (Boscarino, Filbet, y Russo, 2016).

En este trabajo nos enfocamos en el estudio de la precisión numérica combinando una discretización espacial mediante el método de diferencias finitas con técnicas de integración en tiempo totalmente implícitas, métodos Implícito-Explícito (IMEX) y métodos linealmente implícitos IMEX (LI-IMEX). Tal comparación para el modelo BRCE no ha sido explorada previamente. El documento está organizado de la siguiente manera. En la sección II presentamos la descripción del modelo BCRE, luego, en la sección III realizamos la discretización espacial y temporal, en la sección IV presentamos los resultados numéricos y finalmente en la sección V exponemos las conclusiones y trabajos a futuro.

## II | MODELO BCRE

Considere la pila de arena representada en la Figura 1 en el dominio espacial  $\Omega = [0, L]$ , la cual se basa en la suposición de poder separar los granos de arena de la pila en dos poblaciones de granos; granos estáticos y granos rodantes. Sea  $H(x, t) \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  la altura de los granos estáticos en la posición  $x$  y tiempo  $t$ ,  $\theta_{ar}$  es el ángulo de reposo de la pila de arena y  $s_c = \tan(\theta_{ar})$  es conocido como el valor crítico relacionado con el ángulo de reposo de la pila. El valor  $-s_c$  es llamado la pendiente crítica o pendiente de reposo y  $l_c(x) = -s_c(x - L)$  el perfil crítico. La densidad local de los granos rodantes denotada por  $r(x, t) \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  representa una avalancha dentro de la pila de arena.

Por conveniencia, introducimos una nueva función

$$h(x, t) = H(x, t) - l(x), \quad (1)$$

donde  $h(x, t) \in \mathbb{R}$  es la altura de los granos estáticos relativa a la pendiente crítica de ángulo  $\theta_{ar}$ , con esta elección el valor  $s_c = 0$ . Cuando  $\frac{\partial h}{\partial x} < s_c = 0$  se tiene una pendiente local sobrecrítica y  $\frac{\partial h}{\partial x} > s_c = 0$  pendiente subcrítica.

La evolución temporal de las cantidades  $h$  y  $r$  están gobernadas por las ecuaciones

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( vr - \mathcal{D} \frac{\partial r}{\partial x} \right) = \Gamma(r, h) + f_r(x, t), \quad \forall (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \quad (2a)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\Gamma(r, h) + f_h(x, t), \quad \forall (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \quad (2b)$$

donde  $v$  es la velocidad de desplazamiento de los granos rodantes;  $\mathcal{D}$  es una constante de difusión (o dispersión);  $f_r, f_h \in \mathbb{R}$  términos fuentes;  $\Gamma(r, h) \in \mathbb{R}$  es el término encargado de la conversión de granos estáticos en granos rodantes y vice versa (Bouchaud y cols., 1994).

El término  $\Gamma(r, h)$  está definido por

$$\Gamma(r, h) = -r \left( \gamma \frac{\partial h}{\partial x} + \kappa \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right), \quad (3)$$

donde  $\gamma$  y  $\kappa$  son constantes positivas. La ecuación (3) incorpora principalmente dos efectos; *erosión* y *deposición*. Los efectos de erosión y deposición dependen de la pendiente local de los granos estáticos  $\frac{\partial h}{\partial x}$  y el valor crítico  $s_c$ , a saber,  $\frac{\partial h}{\partial x} < 0$  para la erosión y  $\frac{\partial h}{\partial x} > 0$  deposición. Las ecuaciones (2) están sujetas a las condiciones iniciales

$$r(x, 0) = r^0(x), \quad (4a)$$

$$h(x, 0) = h^0(x), \quad (4b)$$

y condiciones de frontera

$$vr - \mathcal{D} \frac{\partial r}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad \text{en } x = 0, \quad (5a)$$

$$r(L, t) = 0 \quad \text{y} \quad h(L, t) = 0 \quad \text{para } t > 0. \quad (5b)$$

Las ecuaciones (5) se definen a partir del hecho de que en la pila de arena existe un pared o frontera aislante en  $x = 0$  y en  $x = L$  existe un sumidero.

Sea el dominio espacio-temporal  $\Omega_{t_{max}} = \Omega \times (0, t_{max}]$ , sustituyendo (3) en las ecuaciones (2) se obtiene el problema

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( vr - \mathcal{D} \frac{\partial r}{\partial x} \right) = -r \gamma \frac{\partial h}{\partial x} - r \kappa \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + f_r(x, t), \quad \forall (x, t) \in \Omega_{t_{max}}, \quad (6a)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = r \gamma \frac{\partial h}{\partial x} + r \kappa \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + f_h(x, t), \quad \forall (x, t) \in \Omega_{t_{max}}, \quad (6b)$$

$$r(x, 0) = r^0(x), \quad (6c)$$

$$h(x, 0) = h^0(x), \quad (6d)$$

$$vr - \mathcal{D} \frac{\partial r}{\partial x} = 0, \quad \text{en } x = 0 \quad (6e)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad \text{en } x = 0, \quad (6f)$$

$$r(L, t) = 0 \quad \text{y} \quad h(L, t) = 0. \quad (6g)$$

Cabe resaltar que el problema (6) posee términos no lineales provenientes de la ecuación (3), por lo que resulta difícil obtener soluciones analíticas del modelo.

### III | ESQUEMA NUMÉRICO

En esta sección presentamos la discretización espacial mediante el método de diferencias finitas y diferentes técnicas de integración en tiempo para la aproximación de la solución del modelo BCRE.

#### 1 | Discretización espacial

El dominio espacial  $\Omega = [0, L]$  es discretizado mediante una malla uniforme de tamaño  $\Delta x = \frac{L}{N_x}$  con nodos

$$x_i = (i - 1)\Delta x \quad \text{para } i = 1, \dots, N_x + 1.$$

Con esta elección de  $\Delta x$ , tenemos que los nodos fronteras son  $x_1 = 0$ ,  $x_{N_x+1} = L$ . Para imponer condiciones de frontera de Robin o Neuman incluimos el nodo  $x_0 = -\Delta x$  conocido como nodo fantasma.

Sea  $r_i(t) = r(x_i, t)$  y  $h_i(t) = h(x_i, t)$ . Aplicando el método de líneas, a lo largo de la línea  $x = x_i$  el sistema (6) es aproximado con el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias(EDO)

$$\frac{dr_i}{dt} = -v\delta_{1,\Delta x}(r_i) + \mathcal{D}\delta_{2,\Delta x}(r_i) - r_i\gamma\delta_{1,\Delta x}(h_i) - r_i\kappa\delta_{2,\Delta x}(h_i) + f_r(x_i, t), \quad (7a)$$

$$\frac{dh_i}{dt} = r_i\gamma\delta_{1,\Delta x}(h_i) + r_i\kappa\delta_{2,\Delta x}(h_i) + f_h(x_i, t), \quad (7b)$$

para  $i = 1, 2, \dots, N_x$  donde

$$\delta_{1,\Delta x}(u_i) := \frac{1}{2\Delta x}(u_{i+1} - u_{i-1}), \quad (8a)$$

$$\delta_{2,\Delta x}(u_i) := \frac{1}{\Delta x^2}(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) \quad (8b)$$

son los operadores discretos generados por fórmulas de diferencias finitas centrales de segundo orden para aproximar la primera y segunda derivada respectivamente.

Las incógnitas generadas por el nodo fantasma  $x_0$  son eliminadas al imponer las condiciones de frontera (5) para  $r$  y  $h$  respectivamente.

Sean los vectores  $\mathbf{r}(t) = [r_1(t), r_2(t), \dots, r_{N_x}(t)]^T$ ,  $\mathbf{h}(t) = [h_1(t), h_2(t), \dots, h_{N_x}(t)]^T$ ,  $\mathbf{f}_1(t) = [f_r(x_1, t), f_r(x_2, t), \dots, f_r(x_{N_x}, t)]^T$  y  $\mathbf{f}_2(t) = [f_h(x_1, t), f_h(x_2, t), \dots, f_h(x_{N_x}, t)]^T$ .

Al reescribir el sistema (7) en forma matricial se obtiene el problema semidiscreto

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -v\mathbf{C}_1\mathbf{r} + \mathcal{D}\mathbf{D}_1\mathbf{r} - \gamma\text{diag}(\mathbf{r})\mathbf{C}_2\mathbf{h} - \kappa\text{diag}(\mathbf{r})\mathbf{D}_2\mathbf{h} + \mathbf{f}_1(t), \quad (9a)$$

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = \gamma\text{diag}(\mathbf{r})\mathbf{C}_2\mathbf{h} + \kappa\text{diag}(\mathbf{r})\mathbf{D}_2\mathbf{h} + \mathbf{f}_2(t), \quad (9b)$$

donde  $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2 \in \mathbb{R}^{N_x \times N_x}$  y  $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2 \in \mathbb{R}^{N_x \times N_x}$  son las matrices generadas a partir del operador  $\delta_{1,\Delta x}^0(u_i)$  y  $\delta_{2,\Delta x}^0(u_i)$  respectivamente. La matriz diagonal  $\text{diag}(\mathbf{r}) \in \mathbb{R}^{N_x \times N_x}$  es creada a partir del vector  $\mathbf{r}$ . Para claridad en la notación del sistema (9) hemos quitado la dependencia en  $t$  de las variables  $\mathbf{h}$  y  $\mathbf{r}$ . La solución inicial del sistema de EDO (9) se obtiene desde las condiciones iniciales (4), estas están dadas por los vectores  $\mathbf{r}(0) = [r^0(x_0), r^0(x_2), \dots, r^0(x_{N_x})]^T$  y  $\mathbf{h}(0) = [h^0(x_1), h^0(x_2), \dots, h^0(x_{N_x})]^T$ .

Sea  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{2N_x}$  el vector solución definido por  $\mathbf{u} = [\mathbf{r}, \mathbf{h}]^T$ . Reescribimos el sistema de EDO (9) de la siguiente forma

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathcal{F}(t, \mathbf{u}), \quad (10)$$

donde

$$\mathcal{F}(t, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} -\nu \mathbf{C}_1 \mathbf{r} + \mathcal{D} \mathbf{D}_1 \mathbf{r} - \gamma \text{diag}(\mathbf{r}) \mathbf{C}_2 \mathbf{h} - \kappa \text{diag}(\mathbf{r}) \mathbf{D}_2 \mathbf{h} + \mathbf{F}_1(t) \\ \gamma \text{diag}(\mathbf{r}) \mathbf{C}_2 \mathbf{h} + \kappa \text{diag}(\mathbf{r}) \mathbf{D}_2 \mathbf{h} + \mathbf{F}_2(t) \end{bmatrix}. \quad (11)$$

## 2 | Integración en tiempo

En esta sección nos centraremos en la discretización temporal del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (10) mediante diferentes métodos basados en esquemas implícitos y esquemas implícito-explicito. Iniciamos particionado el dominio temporal  $(0, t_{max}]$  de manera uniforme con un tamaño de paso  $\tau$ , a saber,  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N_t} = t_{max}$  donde  $t_j = j\tau$  para  $j = 0, 1, 2, \dots, N_t$ . A continuación describimos los métodos utilizados para la discretización temporal.

### 2.1 | Métodos implícitos

Para la integración en tiempo con esquemas implícitos hemos considerado los métodos de segundo orden siguientes:

#### 1. Regla Trapezoidal(RT)

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \frac{\tau}{2} \mathcal{F}(t^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}) + \frac{\tau}{2} \mathcal{F}(t^n, \mathbf{u}^n). \quad (12)$$

#### 2. Regla del Punto Medio(MP)

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \tau \mathcal{F}(t^n + \frac{\tau}{2}, \frac{1}{2}(\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n+1})). \quad (13)$$

#### 3. Método de Runge-Kutta diagonalmente implícito DIRK(2,2) (Alexander, 1977), el cual escribimos en la notación habitual de Butcher:

$$\text{DIRK}(2,2) := \begin{array}{c|cc} \alpha & \alpha & 0 \\ 1 & 1-\alpha & \alpha \\ \hline & 1-\alpha & \alpha \end{array} \quad \text{con} \quad \alpha = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

### 2.2 | Métodos IMEX

Los métodos implícito-explicito (IMEX) consisten en aplicar en cada paso de tiempo un método implícito a los términos rígidos( términos de difusión, etc. ) y un método explícito a los términos no rígidos (términos de convección, fuentes, etc). Para aplicar este tipo de métodos hemos particionado el lado derecho de la ecuación ( 10) en dos partes; implícita  $\mathcal{F}_{im}$  y explícita  $\mathcal{F}_{ex}$ , es decir,

$$\mathcal{F}(t, \mathbf{u}) = \mathcal{F}_{im}(\mathbf{u}) + \mathcal{F}_{ex}(t, \mathbf{u}),$$

donde

$$\mathcal{F}_{im}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \mathcal{D} \mathbf{D}_1 \mathbf{r} - \kappa \text{diag}(\mathbf{r}) \mathbf{D}_2 \mathbf{h} \\ \kappa \text{diag}(\mathbf{r}) \mathbf{D}_2 \mathbf{h} \end{bmatrix} \quad (14)$$

y

$$\mathcal{F}_{ex}(t, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} -\nu \mathbf{C}_1 \mathbf{r} - \gamma \text{diag}(\mathbf{r}) \mathbf{C}_2 \mathbf{h} \\ \gamma \text{diag}(\mathbf{r}) \mathbf{C}_2 \mathbf{h} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1(t) \\ \mathbf{F}_2(t) \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Tal como se indica anteriormente, la ecuación (14) involucra solamente términos relacionados con la difusión y en la ecuación (15) términos relacionados con convección y fuentes. Los dos métodos IMEX considerados en este trabajo son presentado en (Ascher y cols., 1997), los cuales son denotados por IMEX1 el método *L-stable, two-stage, second-order DIRK(2,3,2)* de orden dos con dos etapas implícitas y tres explícitas; IMEX2 el método *L-stable, two-stage, second-order DIRK(2,2,2)* de orden dos con dos etapas implícitas y dos explícitas.

### 2.3 | LI-IMEX

Los métodos linealmente implícito IMEX (LI-IMEX) son una variante de los métodos IMEX, la principal diferencia consiste en seleccionar cuidadosamente entre dependencia rígida y no rígida en un término no lineal que genera rigidez (por ejemplo un término de difusión no lineal), esto se obtiene identificando la dependencia (posiblemente lineal) de la incógnita del sistema que genera la rigidez, únicamente esta dependencia es tratada implícitamente (Boscarino, Filbet, y Russo, 2016). Esa identificación particular permite obtener sistemas de ecuaciones lineales en cada paso de tiempo, para más detalle ver (Boscarino y cols., 2015).

Sea  $\mathbf{u} = (\mathbf{r}, \mathbf{h})$  las incógnitas tratadas implícitamente y  $\mathbf{u}^* = (\mathbf{r}^*, \mathbf{h}^*)$  las incógnitas tratadas explícitamente. Al identificar las incógnitas del lado derecho de la ecuación (10) relacionadas con la rigidez en cada término, obtenemos el sistema particionado de la forma

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathcal{F}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*, t), \quad (16a)$$

$$\frac{d\mathbf{u}^*}{dt} = \mathcal{F}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*, t), \quad (16b)$$

donde (16a) es tratado de forma implícita y (16b) de forma explícita con

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*, t) = \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_1 \mathbf{r}^* + \mathbf{D}_1 \mathbf{r} - \text{diag}(\mathbf{r}^*) \mathbf{C}_2 \mathbf{h}^* - \text{diag}(\mathbf{r}^*) \mathbf{D}_2 \mathbf{h} + \mathbf{F}_1(t) \\ \text{diag}(\mathbf{r}^*) \mathbf{C}_2 \mathbf{h}^* + \text{diag}(\mathbf{r}^*) \mathbf{D}_2 \mathbf{h} + \mathbf{F}_2(t) \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Note que únicamente las incógnitas de los términos relacionados con la difusión son tratadas de forma implícita. En este trabajo consideramos dos métodos linealmente implícitos H-LDIRK  $p(2,2,2)$  con  $p = 2$  y LSDIRK2(2,2,2) propuesto en (Boscarino, Filbet, y Russo, 2016) los cuales denotaremos por LI-IMEX1 y LI-IMEX2 respectivamente.

## IV | EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Para la comparación de los métodos de integración en tiempo en cuanto a eficiencia y precisión presentamos diferentes experimentos numéricos. La implementación de los métodos numéricos se llevo a cabo en el entorno de programación GNU Octave. Los métodos implícitos y métodos IMEX generan un sistema de ecuaciones no lineales en cada paso de tiempo, dichos sistemas se resolvieron aplicando el método de Newton utilizando como criterio de paro la norma dos del error de dos iteraciones consecutivas con una tolerancia  $\varepsilon = 10^{-10}$ . Para resolver los sistemas lineales se utilizó el operador de división por la izquierda \ de GNU Octave.

$\Delta x$	RT		MP		DIRK(2,2)	
	Error	$OC_E$	Error	$OC_E$	Error	$OC_E$
2.00e-01	1.4239e-02	-	7.6903e-03	-	1.5258e-03	-
1.00e-01	3.5594e-03	2.00	1.9225e-03	2.00	3.9276e-04	1.96
5.00e-02	8.8974e-04	2.00	4.8058e-04	2.00	9.9604e-05	1.98
2.50e-02	2.2242e-04	2.00	1.2014e-04	2.00	2.5078e-05	1.99
1.25e-02	5.5603e-05	2.00	3.0034e-05	2.00	6.2915e-06	1.99

Tabla 1: Errores y orden de convergencia para el Experimento 1 con esquemas implícitos.

### 1 | Experimento 1 - Validación del orden de precisión

Considere el problema (6) en el dominio  $\Omega_{t_{max}} = [0, 100] \times (0, 2]$  con  $\mathcal{D} = 10$ ,  $\nu = \frac{\pi}{20}$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\kappa = 1$ . Las funciones  $f_r$  y  $f_h$  se escogen de tal forma que las soluciones exactas sean las funciones

$$r(x, t) = \exp(-t) \left( \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) + 1 \right), \quad (18a)$$

$$h(x, t) = \exp(-t) \cos\left(\frac{3\pi}{2L}x\right). \quad (18b)$$

Las condiciones iniciales del problema (6) se toman directamente de las ecuaciones (18) al establecer  $t = 0$ .

Para validar la convergencia de los métodos, calculamos el error en la aproximación mediante la ecuación

$$E = \sqrt{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{exact}\|_{\Delta x}^2 + \|\mathbf{h} - \mathbf{h}^{exact}\|_{\Delta x}^2}, \quad (19)$$

donde  $\|\mathbf{u}\|_{\Delta x}^2 = \Delta x \sum_{i=1}^{N_x} |u_i|^2$ . Los vectores denotados por  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{u}^{exact}$  son la solución aproximada y exacta respectivamente.

Para verificar el orden de convergencia tanto en espacio como en tiempo, consideramos dos aproximaciones calculadas en mallas diferentes con tamaños  $\Delta x_1$ ,  $\Delta x_2$  y  $\tau$  proporcional a  $\Delta x$ , en este experimento se estableció  $\tau_1 = \frac{\Delta x_1}{2}$  y  $\tau_2 = \frac{\Delta x_2}{2}$ , con cada aproximación se obtienen los errores  $E_1$  y  $E_2$  en el tiempo final  $t_{max} = 2$ . La estimación del orden de convergencia se obtiene mediante la expresión

$$OC_E := \frac{\log(E_1/E_2)}{\log(\Delta x_1/\Delta x_2)}. \quad (20)$$

Los resultados obtenidos al aplicar esquemas implícitos son mostrados en la Tabla 1 y para esquemas IMEX y LI-IMEX en la Tabla 2. El orden de convergencia estimado coincide con el orden de convergencia teórico esperado, dos, tanto en espacio como en tiempo. En la Figura 2 se presenta la convergencia (asintótica) de cada método, con los métodos DIRK(2,2) y LI-IMEX2 se obtiene una mayor precisión. En la Tabla 3 mostramos los tiempos de ejecución para cada método, para esquemas implícitos y IMEX se resuelven sistemas de ecuaciones no lineales, en el caso de los LI-IMEX sistemas lineales, este hecho se ve reflejado en los tiempos obtenidos.

$\Delta x$	IMEX1		IMEX2		LI-IMEX1		LI-IMEX2	
	Error	$OC_E$	Error	$OC_E$	Error	$OC_E$	Error	$OC_E$
0.2	1.6846e-03	-	1.5706e-02	-	4.0187e-03	-	1.8134e-03	-
0.1	4.3220e-04	1.96	3.9049e-03	2.01	1.0006e-03	2.01	4.4685e-04	2.02
0.05	1.0944e-04	1.98	9.7349e-04	2.00	2.4964e-04	2.00	1.1100e-04	2.01
0.025	2.7533e-05	1.99	2.4303e-04	2.00	6.2343e-05	2.00	2.7666e-05	2.00
0.0125	6.9049e-06	2.00	6.0714e-05	2.00	1.5578e-05	2.00	6.9064e-06	2.00

Tabla 2: Errores y orden de convergencia para el Experimento 1 con esquemas IMEX y LI-IMEX.

$\Delta x$	RT	MP	DIRK	IMEX1	IMEX2	LI-IMEX1	LI-IMEX2
2.00e-01	0.12	0.14	0.28	0.23	0.24	0.13	0.07
1.00e-01	0.40	0.40	0.84	0.68	0.67	0.32	0.23
5.00e-02	1.36	1.38	2.85	2.39	2.35	0.78	0.77
2.50e-02	5.02	5.04	11.24	8.97	9.18	2.86	2.82
1.25e-02	19.88	20.64	41.01	34.29	33.65	<b>11.19</b>	<b>11.09</b>

Tabla 3: Tiempos de ejecución(en segundos) para el Experimento 1.

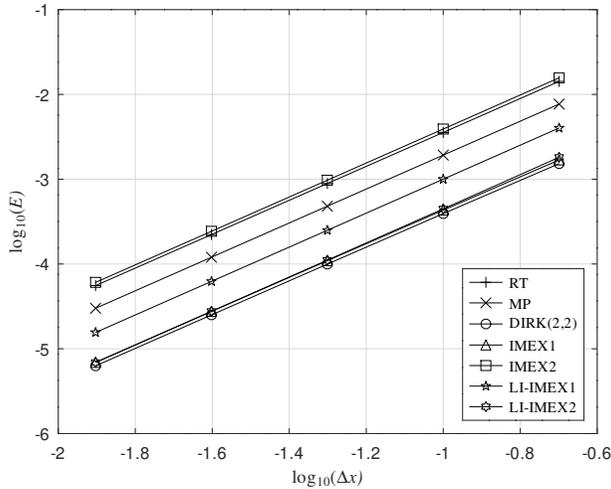


Figura 2: Convergencia y precisión con esquemas implícitos, IMEX y LI-IMEX para el Experimento 1.

## 2 | Experimento 2 - Pendiente local sobrecrítica y subcrítica

La pendiente local de la altura de la pila de arena es uno de los elementos esenciales en el modelo BCRE. En este experimento analizamos la influencia de una pendiente sobrecrítica y una pendiente

subcrítica en la aproximación de la solución del problema 6. Considere el dominio espacio-temporal  $\Omega_{t_{max}} = [0, 10] \times [0, 10]$  y los parámetros  $\mathcal{D} = 1, \nu = 0.1, \gamma = 1, \kappa = 1$  para el problema (6) con  $f_r(x, t) = 0, f_h(x, t) = 0$ . La cantidad de granos rodantes dentro de la pila de arena inicialmente está dada por

$$r_0(x) = -\tanh(4x^2) \tanh(2(x - L)), \tag{21}$$

esta elección particular de  $r_0(x)$  permite establecer una cantidad constante en la mayor parte del dominio espacial, además de satisfacer las condiciones de frontera.

Para el estado inicial de la altura de la pila de arena  $h_0(x)$  se consideran dos escenarios:

(a) Pendiente local inicial sobrecrítica:

$$h_0(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2L}x\right), \tag{22}$$

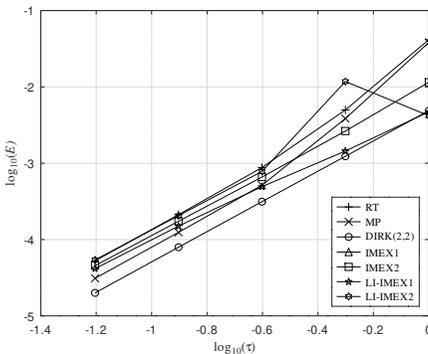
es decir,  $\frac{\partial h}{\partial x} < 0$ .

(b) Pendiente local inicial subcrítica:

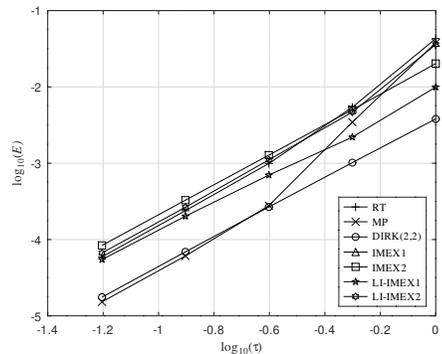
$$h_0(x) = -\cos\left(\frac{\pi}{2L}x\right), \tag{23}$$

se tiene que  $\frac{\partial h}{\partial x} > 0$ .

Para el análisis se considera una malla fija con un tamaño lo suficientemente pequeño, de tal forma que el error de la aproximación esté dominado por el error de la discretización en tiempo (Lowrie, 2004). Al no conocer la solución exacta, en el cálculo del error se utilizó una solución de referencia calculada con el método DIRK(2,2) con un tamaño de malla  $\Delta x_{ref} = 1/640$  y con un paso en tiempo  $\tau = \Delta x_{ref}/2$ . Los errores y el orden de convergencia estimado obtenidos en el tiempo final  $t_{max} = 10$  para el caso (a) se muestran en la Tabla 4 para los métodos con esquemas implícitos y en la Tabla 5 para esquemas IMEX y LI-IMEX. Para el caso (b), los resultados se muestran en la Tabla 6 para esquemas implícitos y en la Tabla 7 para esquemas IMEX y LI-IMEX. Cabe resaltar que el método IMEX1 es inestable en ambos casos para los pasos en tiempos utilizados, lo que sugiere una mayor restricción en el paso en tiempo  $\tau$  respecto a los otros métodos. En la Figura 3 se presenta la precisión en tiempo de los esquemas implícitos, IMEX y LI-IMEX para ambos casos. Para el caso (b), con los métodos MP y DIRK(2,2) se obtiene una mayor precisión.



(a) Pendiente local inicial sobrecrítica.



(b) Pendiente local inicial subcrítica.

Figura 3: Precisión en tiempo con esquemas implícitos, IMEX y LI-IMEX para el Experimento 2.

$\tau$	RT		MP		DIRK(2,2)	
	Error	$OC_E$	Error	$OC_E$	Error	$OC_E$
1.00e+00	4.1599e-02	-	3.8185e-02	-	4.8900e-03	-
5.00e-01	4.9936e-03	3.06	3.8506e-03	3.31	1.2335e-03	1.99
2.50e-01	8.7897e-04	2.51	5.1466e-04	2.90	3.1336e-04	1.98
1.25e-01	2.1174e-04	2.05	1.2419e-04	2.05	7.9360e-05	1.98
6.25e-02	5.2535e-05	2.01	3.1042e-05	2.00	1.9999e-05	1.99

Tabla 4: Errores y orden de convergencia para el Experimento 2 - Caso a) con esquemas implícitos.

$\tau$	IMEX1		IMEX2		LI-IMEX1		LI-IMEX2	
	Error	$OC_E$	Error	$OC_E$	Error	$OC_E$	Error	$OC_E$
1.00e+00	*	-	1.1500e-02	-	4.7181e-03	-	4.1927e-03	-
5.00e-01	*	*	2.6405e-03	2.12	1.4453e-03	1.71	1.1769e-02	-1.49
2.50e-01	*	*	6.5912e-04	2.00	4.9277e-04	1.55	7.7988e-04	3.92
1.25e-01	*	*	1.7372e-04	1.92	1.5012e-04	1.71	2.0551e-04	1.92
6.25e-02	*	*	4.5500e-05	1.93	4.1554e-05	1.85	5.4140e-05	1.92

Tabla 5: Errores y orden de convergencia para el Experimento 2-Caso a) con esquemas IMEX y LI-IMEX. El símbolo \* indica que el método es inestable.

$\tau$	RT		MP		DIRK(2,2)	
	Error	$OC_E$	Error	$OC_E$	Error	$OC_E$
1.00e+00	4.2986e-02	-	3.7909e-02	-	3.8085e-03	-
5.00e-01	5.4143e-03	2.99	3.4543e-03	3.46	1.0179e-03	1.90
2.50e-01	9.9459e-04	2.44	2.7824e-04	3.63	2.6728e-04	1.93
1.25e-01	2.3917e-04	2.06	6.0987e-05	2.19	6.8997e-05	1.95
6.25e-02	5.9258e-05	2.01	1.5250e-05	2.00	1.7573e-05	1.97

Tabla 6: Errores y orden de convergencia para el Experimento 2 - Caso b) con esquemas implícitos.

$\tau$	IMEX1		IMEX2		LI-IMEX1		LI-IMEX2	
	Error	$OC_E$	Error	$OC_E$	Error	$OC_E$	Error	$OC_E$
1.00e+00	*	-	2.0241e-02	-	9.9617e-03	-	3.5910e-02	-
5.00e-01	*	*	5.0176e-03	2.01	2.1953e-03	2.18	4.6757e-03	2.94
2.50e-01	*	*	1.2767e-03	1.97	6.9878e-04	1.65	1.1079e-03	2.08
1.25e-01	*	*	3.2826e-04	1.96	2.0237e-04	1.79	2.6501e-04	2.06
6.25e-02	*	*	8.3746e-05	1.97	5.4637e-05	1.89	6.6769e-05	1.99

Tabla 7: Errores y orden de convergencia para el Experimento 2-Caso b) con esquemas IMEX y LI-IMEX. El símbolo \* indica que el método es inestable.

### 3 | Experimento 3 - Evolución de un bulto

Considere el problema (6) en el dominio  $\Omega_{t_{max}} = [0, L] \times (0, t_{max}]$  con  $L = 100$ ,  $t_{max} = 100$ ,  $\mathcal{D} = 10.0$ ,  $v = 0.1$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\kappa = 1$ ,  $f_r = 0$  y  $f_h = 0$ . Las condiciones iniciales están dadas por

$$r_0(x) = -\tanh(4x^2) \tanh(2(x-L))$$

y

$$h_0(x) = \exp\left(-\frac{(x-60)^2}{L}\right).$$

En este escenario,  $h_0(x)$  consiste en un bulto en medio del dominio  $\Omega$ , con el cual se permite apreciar el proceso de erosión y deposición de granos rodantes a medida el sistema evoluciona en el tiempo.

Al no conocer la solución exacta para este escenario, se calculó una solución de referencia con  $\Delta x_{ref} = 1/80$  y  $\tau_{ref} = \Delta x$  con el método DIRK(2,2), la solución de referencia espacio-temporal para  $r$  se muestra en la Figura 4a y para  $h$  en la Figura 4c. En la Figura 4b se muestra la evolución temporal del error para una aproximación calculada en un malla de tamaño  $\Delta x_{ref}$  con un paso en tiempo  $\tau = 0.4$ , el cual permite visualizar el comportamiento del error involucrado en la discretización temporal, dicha evolución muestra el mismo comportamiento tanto para esquemas implícitos como para esquemas IMEX y LI-IMEX. Para comparación, se muestra en la Figura 4d el valor máximo de la solución de referencia obtenido en cada paso de tiempo, donde se aprecia una influencia de este en el error, cerca de  $t = 10$  el valor máximo de  $r$  incrementa al igual que el error en cada uno de los métodos.

## V | CONCLUSIONES Y TRABAJOS A FUTURO

Se presentó una comparación numérica de esquemas implícitos, IMEX y LI-IMEX para la integración en tiempo utilizando el método de diferencias finitas como discretización espacial aplicados al modelo no lineal BCRC.

- Se realizaron los test de convergencia tanto en espacio como en tiempo para cada método, se obtuvieron las tasas de convergencias óptimas esperadas.

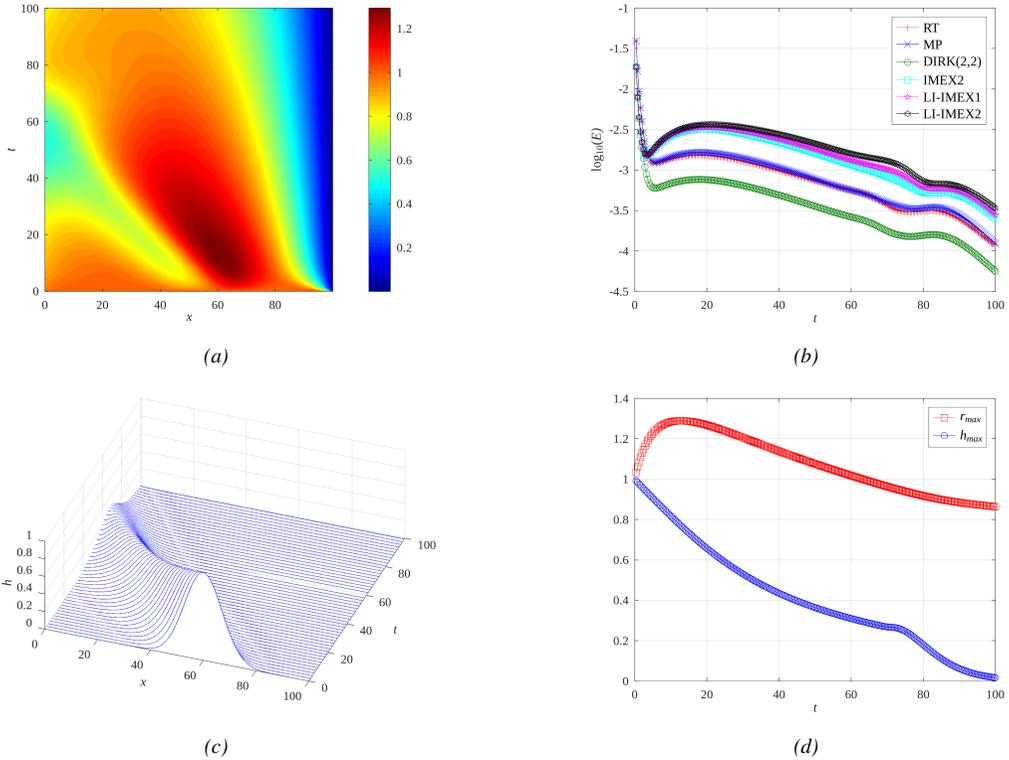


Figura 4: Solución espacio-temporal para (a)  $r(x,t)$  y (c)  $h(x,t)$ , (b) evolución temporal del error y (d) el valor máximo de la solución de referencia en el Experimento 3.

- Los métodos IMEX no presentan ninguna mejora considerable, mientras que los métodos con esquemas LI-IMEX tienen una clara ventaja en cuanto al costo computacional, hasta tres veces más rápidos que los esquemas implícitos e IMEX. Respecto a la precisión, no se evidencia una pérdida considerable en comparación con los demás métodos.
- En cuanto a precisión, con el método DIRK(2,2) se obtuvieron mejores resultados, aunque este requiere un mayor costo computacional. También se evidenció que la precisión para este método se ve afectada cuando la pendiente local inicial es sobrecrítica.

Como trabajos a futuros se pretende investigar la eficiencia de una discretización espacial mediante elementos finitos discontinuos aplicada al modelo BCRE con la cual es posible obtener discretizaciones espaciales de alto orden y imponer condiciones de frontera con facilidad. También se pretende incluir en la comparación a los esquemas de integración en tiempo conocidos como métodos de descomposición de operadores, además de realizar un estudio más detallado de las restricciones del paso en tiempo. Es importante remarcar que los esquemas analizados en este trabajo pueden extenderse a problemas más generales, por lo que es otra ruta de investigación a considerar.

## I REFERENCIAS

- Alamino, R. C., y Prado, C. P. (2002). Some considerations on the bouchaud–cates–ravi–edwards model for granular flow. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 308(1-4), 148–160.
- Alexander, R. (1977). Diagonally implicit runge-kutta methods for stiff ode's. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 14(6), 1006–1021.
- Aradian, A., Raphaël, E., y de Gennes, P.-G. (1999). Thick surface flows of granular materials: Effect of the velocity profile on the avalanche amplitude. *Physical Review E*, 60(2), 2009.
- Ascher, U. M., Ruuth, S. J., y Spiteri, R. J. (1997). Implicit-explicit runge-kutta methods for time-dependent partial differential equations. *Applied Numerical Mathematics*, 25(2-3), 151–167.
- Bak, P., Tang, C., y Wiesenfeld, K. (1987, 08). Self-organized criticality: An explanation of  $1/f$  noise. *phys. rev. lett.* 59, 381-384. *Physical Review Letters*, 59, 381-384.
- Boscarino, S., Bürger, R., Mulet, P., Russo, G., y Villada, L. M. (2015). Linearly implicit imex runge–kutta methods for a class of degenerate convection–diffusion problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 37(2), B305–B331.
- Boscarino, S., Bürger, R., Mulet, P., Russo, G., y Villada, L. M. (2016, 03). On linearly implicit imex runge-kutta methods for degenerate convection-diffusion problems modeling polydisperse sedimentation. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, 47, 171-185.
- Boscarino, S., Filbet, F., y Russo, G. (2016). High order semi-implicit schemes for time dependent partial differential equations. *Journal of Scientific Computing*, 68(3), 975–1001.
- Bouchaud, J.-P., Cates, M. E., Ravi Prakash, J., y Edwards, S. F. (1994, 10). A model for the dynamics of sandpile surfaces. *J. Phys. I France*, 4(10), 1383-1410.
- Boutreux, T., Raphaël, E., y de Gennes, P.-G. (1998). Surface flows of granular materials: a modified picture for thick avalanches. *Physical Review E*, 58(4), 4692.
- Bürger, R., Gavilán, E., Inzunza, D., Mulet, P., y Villada, L. M. (2020). Implicit-explicit methods for a convection-diffusion-reaction model of the propagation of forest fires. *Mathematics*, 8(6).
- Castillo, P., y Henríquez, I. (2017). Evaluación de discretizaciones en tiempo y métodos ldg para problemas de difusión y reacción no lineal en 2d. *Revista Mexicana de Ingeniería Química*, 16(2), 541–554.
- de Gennes, P.-G. (2006). Granular matter. *La Rivista del Nuovo Cimento*, 29(8), 1–33.
- Emig, T., Claudin, P., y Bouchaud, J.-P. (2000). Exact solutions of a model for granular avalanches. *EPL (Europhysics Letters)*, 50(5), 594.
- Hwa, T., y Kardar, M. (1992, May). Avalanches, hydrodynamics, and discharge events in models of sandpiles. *Phys. Rev. A*, 45, 7002–7023.
- Lowrie, R. B. (2004). A comparison of implicit time integration methods for nonlinear relaxation and diffusion. *Journal of Computational Physics*, 196(2), 566–590.