



# “Caminos geométricos” en el espacio bidimensional de Minkowski para obtener las transformaciones de Lorentz y sus consecuencias

## “Geometric paths” in the two-dimensional Minkowski space to obtain the Lorentz transformations and their consequences

F.J. GARAY<sup>1</sup>

Recibido: 15 de septiembre de 2022 / Aceptado: 30 de noviembre de 2022

### RESUMEN

En este artículo se aborda un modo no habitual (poco usado en la bibliografía sobre Relatividad Restringida) de llegar a las conocidas transformaciones de Lorentz a partir de consideraciones provenientes del espacio bidimensional de Minkowski. Su característica fundamental, proveniente de la forma no euclidiana del elemento de longitud, es que para pasar de un sistema de referencia a otro se usan rotaciones hiperbólicas; esto supone dejar los círculos (habituales en las rotaciones euclidianas) y pasar a las hipérbolas. Usando esta geometría hiperbólica y las relaciones para ángulos hiperbólicos (equivalentes y muy parecidas a las de ángulos circulares) se generan fácilmente las transformaciones de Lorentz. Para obtener la dilatación temporal, la contracción de longitud y la suma relativista de velocidades se utilizan el espacio minkowskiano y geometría sencilla. Por otro lado, como se sabe, el conocido enfoque de simetrías (vía grupo de Lorentz o Poincaré), es más potente con el análisis tensorial y muy físico. Si bien este enfoque geométrico no es tan poderoso, es muy sencillo y sin duda presenta un carácter pedagógico especialmente para pregrado. Y, por supuesto, si quisiéramos pasar del espacio bidimensional al cuatridimensional, esta vía geométrica se complicaría mucho.

### ABSTRACT

This article deals with an unusual way (barely used in the literature on Special Relativity) to arrive at the well-known Lorentz transformations from considerations coming from the two-dimensional Minkowski space. Its fundamental characteristic, coming from the non-Euclidean form of the element of length, is that hyperbolic rotations are used to move from one reference system to another; this supposes to leave the circles (usual in the Euclidean rotations) and to happen to the hyperbolas. Using this hyperbolic geometry and the relations for hyperbolic angles (equivalent and very similar to those for circular angles) Lorentz transformations are easily generated. To obtain the time dilation, the length contraction and the relativistic sum of velocities, the Minkowskian space and simple geometry are used. On the other hand, as is known, the well-known symmetry approach (via the Lorentz or Poincare group), is more powerful with tensorial and very physical analysis. Although this geometric approach is not as powerful, it is very simple and certainly has a pedago-

<sup>1</sup>Escuela de Física. Universidad Nacional Autónoma de Honduras.  
felipe.garay@unah.edu.hn

\* Esta obra está bajo una licencia Creative Commons Reconocimiento - NoComercial 4.0 Internacional

\* This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License.

gical character especially for undergraduates. And, of course, if we go from two-dimensional space to four-dimensional space, this geometric path would become much more complicate.

#### PALABRAS CLAVES

caminos geometricos, espacio de minkowski, espacio bidimensional, transformaciones de lorentz

#### KEYWORDS

geometric paths, minkowski space, two-dimensional space, lorentz transformations

## I | LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS Y SU “CONEXIÓN” CON EL ESPACIO DE MINKOWSKI

La introducción a este trabajo sobre funciones hiperbólicas y su “capacidad” de resolución (digamos “gráfica”, en problemas de Relatividad Especial en marcos inerciales) partirá de un estudio visual y analítico de la figura 1:

- Los valores de  $\cosh a$  y  $\sinh a$ , se pueden “medir” sobre la hipérbola  $x^2 - y^2 = 1$ . Ello por la conocida relación entre esas funciones hiperbólicas:  $\cosh^2 a - \sinh^2 a = 1$ ; de modo ‘equivalente’ a como las relaciones circulares al “medirlas” sobre el círculo unitario reproducen la aún mas conocida expresión  $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$
- El ángulo “circular”  $a$  en el intervalo  $[0, 2\pi]$  no tiene “restricciones”. Cualquier recta tipo  $y=mx$ , determina un valor posible del ángulo, tal que  $m=\tan a$ , en las opciones  $u=\pi/2, -\pi/2$ , corresponderían a rectas verticales (pendiente infinita). En cambio, el “ángulo hiperbólico”, por ejemplo, en el primer cuadrante está restringido a  $[0, \pi/4) \cup (\pi/4, \pi/2]$ , de tal modo que en el primer subintervalo la hipérbola es la de la figura y en el segundo subintervalo se tratará de una hipérbola (no aparece en la figura) con abertura hacia arriba según el eje Y; la recta  $y = x$  es un “límite”, digamos especial.
- Finalmente es muy interesante también hacer notar lo que sigue:
  - El área de un sector circular subtendido por cierto ángulo  $\alpha$  es, como se sabe:  $A = \alpha R^2/2$ , donde R sería el radio, luego para el círculo unitario:  $A_{s.circ.} = a_{circ}/2$
  - Pero resulta que si calculamos el área del “triángulo hiperbólico” (esto es, el sector hiperbólico subtendido por el mismo ángulo  $a$ , región en rojo), tendríamos:

$$A_{s.hip.} = \int_0^{\sinh a} (x_{hip} - x_{recta}) dy = \int_0^{\sinh a} (\sqrt{y^2 + 1} - y/\tanh a) dy = a_{hip}/2$$

Cuando se trata del espacio de Minkowski (coordenadas espacio-tiempo, tomando  $c = 1$ ), propio de la Relatividad, la cual se fundamenta en la constancia de la velocidad de la luz para cualquier marco de referencia, las asíntotas ( $y = \pm x$ ) de las hipérbolas representan el límite más allá del cual no hay acceso físico: se trata de zonas para cuyo acceso se necesitaría exceder el límite de la velocidad de la luz (esto implica en marcos inerciales, rectas tipo,  $y=bx$ , con  $b > 1$ )

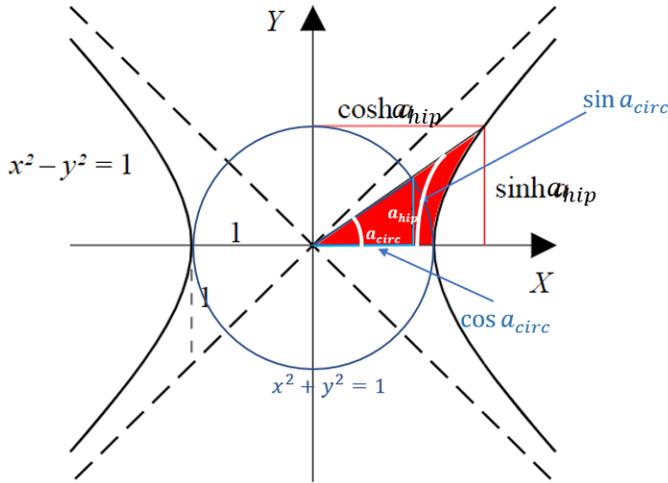


Figura 1: La figura inserta aquí se basa en la que aparece en: (Wikipedia, s.f.) En ella se han introducido información y dibujos adicionales

## II | IMPORTANCIA DE LAS “HIPÉRBOLAS INVARIANTES” EN EL ESPACIO (BIDIMENSIONAL) DE MINKOWSKI

### 1 | Los “círculos invariantes” en la Relatividad galileana

En la Relatividad galileana, una transformación de un referencial fijo a otro móvil (a cierta velocidad  $v$ , respecto del tomado como fijo), se puede representar gráficamente como una rotación “particular” del eje del tiempo manteniéndose el eje de la posición el mismo. Vemos en esta figura 3 que:

1. El tiempo se mide igual en el referencial fijo que en el móvil, aunque haya de tomarse en el eje  $t'$  los segundos aparentemente más grandes: por ejemplo un suceso que desde el referencial tomado como fijo ocurre en  $t = 1$ , ocurre igualmente en  $t' = 1$
2. La velocidad con que se traslada el sistema móvil (respecto del fijo) es la pendiente  $la$  de la recta temporal roja (recuérdese que seguimos usando  $c = 1$ ), esto es, desde el sistema fijo:

a.  $t = \frac{x}{\left(\frac{v}{c}\right)}$  o sencillamente:  $t = x/\beta$

b. La pendiente, en relación con el ángulo mostrado, es

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan \theta}$$

c. De lo que concluimos que

$$\tan \theta = \beta \tag{1}$$

- d. Podemos intuir entonces que todos los valores de velocidad son posibles sin restricción (en  $c$ ), pues  $\tan \theta$  puede llegar hasta  $\infty$
- e. Desde el punto de vista del objeto móvil  $O'$  su posición -como corresponde- no cambia (él ve las cosas como estando fijo y moviéndose a  $-v$  el referencial  $O$ ). Para ubicar la posición en el

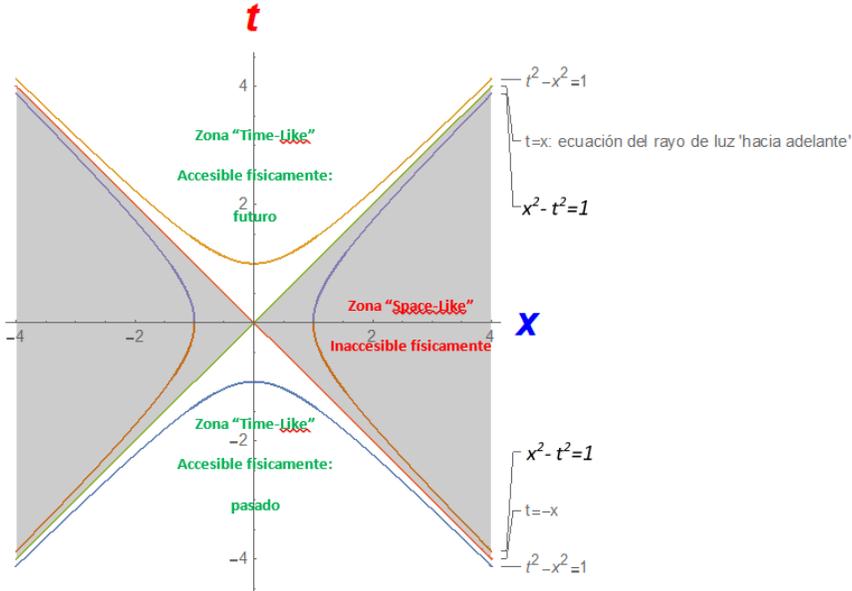


Figura 2

referencial rojo hay que hacer líneas oblicuas paralelas al eje  $t'$ , mientras que para hacer lo mismo respecto al  $O$  han de trazarse líneas verticales (paralelas al eje  $t$ )

- Los círculos que permanecen invariantes ante una “transformación de velocidad” tienen ecuaciones del tipo:  $x^2 + t^2 = a^2$ . Es decir, bajo una “rotación” de velocidad (rota el eje del tiempo y no lo hace el de posición), la ecuación en los nuevos ejes se mantiene invariante:  $x'^2 + t'^2 = a^2$  (ver los círculos en las figuras 3 y 4)

## 2 | Las “hipérbolas invariantes” en la Relatividad einsteiniana

En el espacio de Minkowski (en que existe el límite superior para las velocidades:  $c = 1$  una transformación desde una referencial fijo a uno móvil respecto de él implica una “rotación” de ambos ejes  $x$  y  $t$ . Además se trata de una rotación siguiendo no el tradicional arco circular sino un arco hiperbólico.

La teoría básica de la Relatividad nos asegura la “invariancia” de las hipérbolas; esto es, si, por ejemplo, para la hipérbola de semieje vertical 2, se  $t^2 - x^2 = 4$ , también es válido visto desde el sistema “primado”:  $t'^2 - x'^2 = 4$ . Esto es fundamento esencial (la invariancia del intervalo) en la relatividad restringida y proviene del principio de constancia de la velocidad de la luz en cualquier referencial.

Las “líneas de simultaneidad” son ahora rectas tangentes a las hipérbolas y a su vez paralelas al eje del tiempo de que se trate según qué marco se escoja (ver en la figura 5 las rectas con punto-rayo en color ocre).

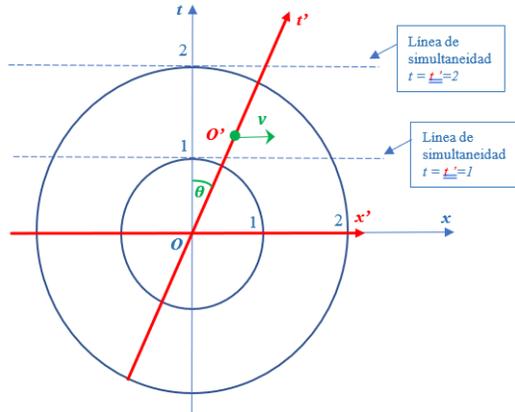


Figura 3

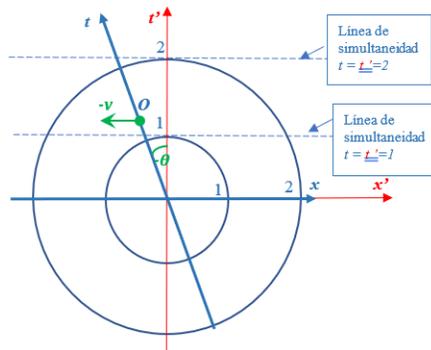


Figura 4

### III | OBTENCIÓN DE LAS TRANSFORMACIONES DE LORENTZ DE FORMA “GEOMÉTRICA”

La figura 5 contiene una gran cantidad de información: escribiremos lo que más nos interesa en orden a la obtención de las transformaciones ahora mencionadas:

1. El eje  $t'$  corresponde a la “línea de Universo” de un objeto móvil desde el sistema no primado: recorriéndolo identificamos un objeto que va cambiando su  $x$  y su  $t$  (desde el punto de vista de él mismo sólo su  $t'$  cambia; su  $x' = 0$  para cualquier instante, y el “ve” al sistema no primado cómo móvil). Podemos escribir su ecuación desde  $(x, t)$  simplemente:

a.  $t = \frac{1}{\beta}x$ , siendo  $\beta = v/c \equiv v$ , pues tomamos, como se ha dicho  $c = 1$

b. Sabemos que ese coeficiente es la pendiente de la recta, expresable con la tangente de un ángulo circular, pero también con la tangente de un ángulo hiperbólico (ver, la recta de trazo azul que

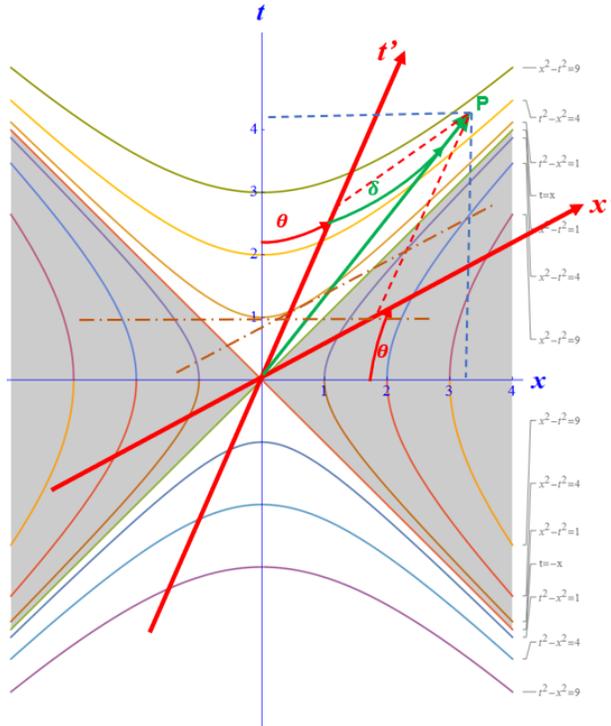


Figura 5

conecta el origen con la hipérbola en la figura 1, y téngase en cuenta que el ángulo que da la pendiente es  $\frac{\pi}{2} - \theta$ ; es decir:

$$1/\beta = \coth \theta \rightarrow \tanh \theta = \beta \tag{2}$$

Este primer resultado que nos arroja la geometría es ya muy importante: la velocidad del sistema móvil directamente relacionada con el ángulo hiperbólico de rotación

2. Expresiones de Lorentz, mediante el uso de las relaciones provenientes de la rotación hiperbólica. Para ello, sencillamente, se han de escribir las coordenadas de P (Greiner (2004)) (que representa un objeto móvil, para ambos referenciales, pero con velocidad menor para el primado)
  - a. Coordenadas de P según el sistema primado:  $t' = a \cosh \delta$  y  $x' = a \sinh \delta$ . Para graficarlas se trazan paralelas (líneas rojas punteadas) a los ejes  $t'$  y  $x'$ ; la línea de Universo verde correspondiente a P representa una rotación hiperbólica de ángulo  $\delta$ , según esos ejes. El valor arbitrario a, procede de suponer que la hipérbola invariante que pasa por P es  $t'^2 - x'^2 = a^2$  (de semieje vertical, a)
  - b. Coordenadas de P según el sistema no primado  $t = a \cosh(\theta + \delta)$  y  $x = a \sinh(\theta + \delta)$
  - c. Uso de las relaciones hiperbólicas para “ángulo suma”:

$$t = a \cosh(\theta + \delta) = \overbrace{a \cosh \theta}^{t'} \cosh \delta + \overbrace{a \sinh \theta}^{x'} \sinh \delta$$

$$x = a \sinh(\theta + \delta) = \overbrace{a \sinh \theta}^{x'} \cosh \delta + \overbrace{a \cosh \theta}^{t'} \sinh \delta$$

d. Al combinar estas expresiones se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} t &= \cosh \theta t' + \sinh \theta x' \\ x &= \sinh \theta t' + \cosh \theta x' \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

e. Y ahora nos valdremos del resultado dado en la fórmula 1

$$\coth \theta = \frac{\cosh \theta}{\sinh \theta} = \frac{\cosh \theta}{\sqrt{\cosh^2 \theta - 1}} = \beta \left\{ \begin{aligned} \cosh \theta &= 1/\sqrt{1-\beta^2} \\ \sinh \theta &= \beta/\sqrt{1-\beta^2} \end{aligned} \right. \quad (4)$$

$$(5)$$

f. Expresiones que llevadas a 2 nos arrojan las conocidas transformaciones de Lorentz:

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (t' + \beta x') \\ x &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (\beta t' + x') \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Finalmente, obtendremos las conocidas dilatación temporal y contracción de longitud, continuando con este “método geométrico”. Y también con un método geométrico llegaremos a la ley relativista de composición de velocidades.

#### IV | EL EXPERIMENTO MENTAL DEL TREN: INTRODUCCIÓN CONVENIENTE

Previo a nuestro análisis, introducimos uno de los famosos “experimentos” con trenes, que permiten fácilmente obtener (en este caso) la dilatación temporal (figura 6).

Al aplicar el conocido teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo, dado que la velocidad de la luz no cambia para ninguno de los dos observadores, se obtiene fácilmente la conocida fórmula de la dilatación temporal:

$$(D'/2)^2 = (D/2)^2 + (L/2)^2 \rightarrow c^2 \Delta t'^2 = c^2 \Delta t^2 + v^2 \Delta t'^2 \rightarrow \Delta t^2 = \frac{\Delta t'^2}{c^2} (c^2 - v^2) \text{ o bien:}$$

$$\Delta t = \Delta t' (1 - v^2/c^2)^{1/2} \equiv \Delta t' = \gamma \Delta t$$

#### V | CONTRACCIÓN DE LORENTZ Y DILATACIÓN TEMPORAL DESDE LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA

Obtendremos ahora las conocidas fórmulas de la relatividad restringida sobre dilatación temporal y contracción de longitud, que aparecen cuando se estudia un marco de referencia móvil desde otro fijo.

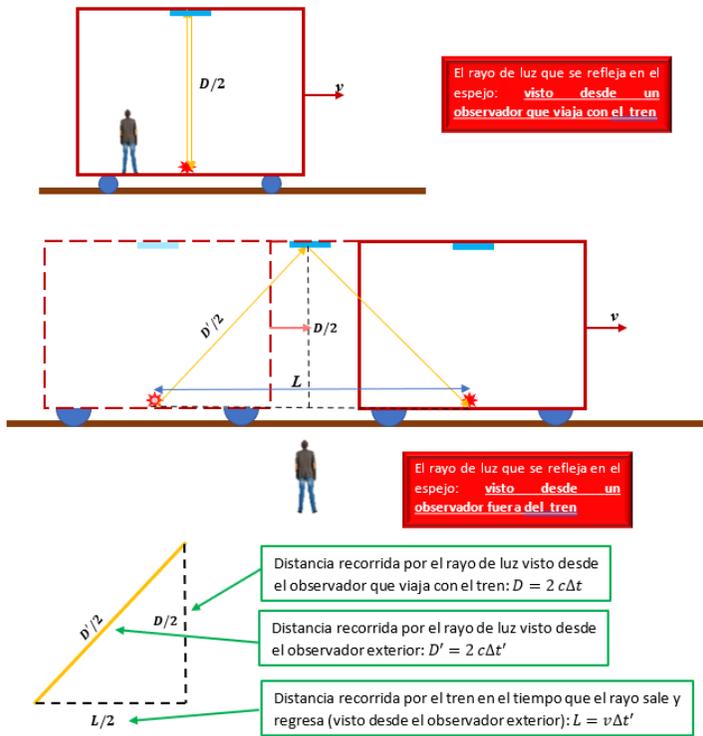


Figura 6

La figura 7 inmediatamente arriba nos servirá de apoyo para encontrar las relaciones: la parte con los segmentos en azul (Russell (2006)), para la dilatación temporal; la parte con los segmentos en verde (Russell (2006)), para la contracción de longitud (Synge (1956)).

Las hipérbolas con abertura según el eje t (aparece un pequeño trozo de una de ellas en la parte superior de la figura 8) tienen de ecuación:  $t^2 - x^2 = (t'^2 - x'^2) = b^2$ , siendo b la ordenada vertical desde el origen al vértice de la hipérbola; en particular las hipérbolas con vértices en A y B (sobre el eje t) son de ecuación:

$$t^2 - x^2 = \overline{OB}^2 \text{ (aparece una parte dibujada)}$$

$$t^2 - x^2 = \overline{OA}^2 \text{ (no aparece dibujada)}$$

Por tanto, la geometría hiperbólica aplicada a los triángulos  $\Delta OAA'$  y  $\Delta OBB'$ , nos señala respectivamente que:  $\overline{OA} = \overline{OA'} \cosh \theta$  y  $\overline{OB} = \overline{OB'} \cosh \theta$  De ahí:

$$\Delta t [= \overline{OB} - \overline{OA} (\equiv \overline{BA})] = \Delta t' [= \overline{OB'} - \overline{OA'} (\equiv \overline{B'A'})] \cosh \theta$$

que se puede leer usando 4 como:

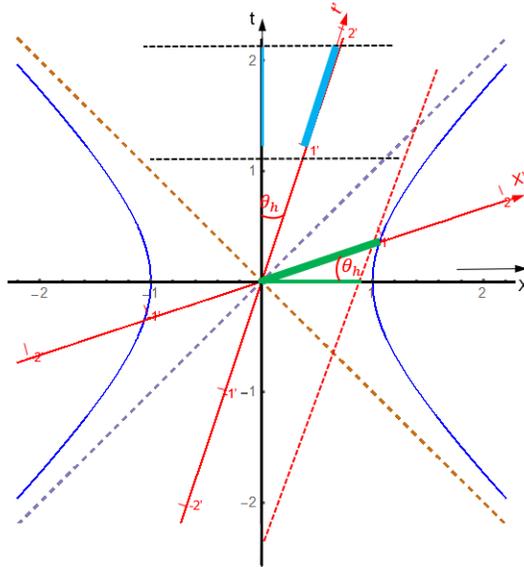


Figura 7

$$\Delta t = \Delta t' \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (\Delta t = \gamma \Delta t', \text{ donde } \gamma > 1) \tag{7}$$

Lo cual muestra que en el marco en el que dos eventos no se ven simultáneos (referencial móvil, S) el tiempo corre más lento respecto del marco en que se ven como simultáneos, S' (tiempo propio).

Se trata ahora de comparar una distancia medida en S' versus la misma distancia vista desde S; en concreto:  $\overline{OB'}$  vs  $\overline{OD}$ .

La hipérbola (en azul), de ecuación:  $x^2 - t^2 = \overline{OB}^2$  (o también según S' :  $x'^2 - t'^2 = \overline{OB'}^2$ ) nos permite asegurar que:

- a) La coordenada X de B' cumple:  $x_{B'} = \overline{OB'} \cosh \theta_h$ , donde también podemos llamar:  $x_{B'} = \overline{OC}$
- b) La coordenada T de B' cumple:  $t_{B'} = \overline{OB'} \sinh \theta_h$ , y del modelo análogo:  $t_{B'} = \overline{CB'}$

Y por otro lado:  $\overline{OD} = \overline{OC} - \overline{DC}$ , con lo que:

$$\overline{OD} = \overline{OB'} \cosh \theta_h - \overline{DC} \tag{8}$$

Usando ahora el ángulo circular,  $\theta_c$  y el triángulo  $\Delta DB'B$ :

$$\tan \left( \frac{\pi}{2} - \theta_c \right) = \cot \theta_c = \overline{CB'} / \overline{DC} \tag{9}$$

Combinando (8) y (9):

$$\overline{OD} = \overline{OB'} \cosh \theta_h - \overline{CB'} / \cot \theta_c = \overline{OB'} \cosh \theta_c - \overline{OB'} \sinh \theta_h / \cot \theta_c \tag{10}$$

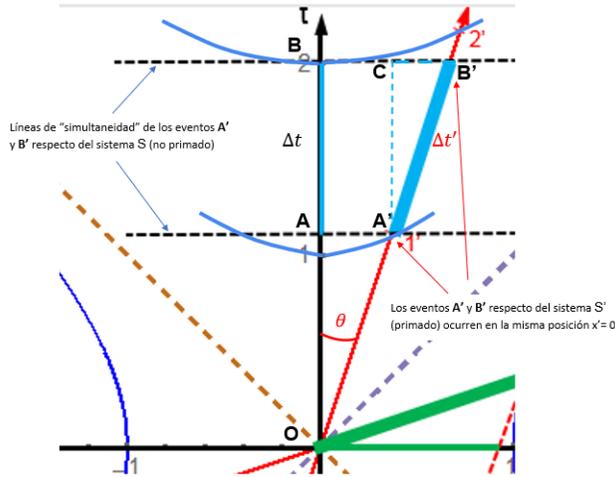


Figura 8

Además, de las ecuaciones (1) y (2):  $\tan \theta \equiv \coth \theta = \beta$ . Si adicionalmente usamos (4) y (5), se obtiene:

$$\overline{OD} = \overline{OB'} \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \beta \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)$$

o bien:  $\overline{OB'} = \gamma \overline{OD}$  equivalente a:

$$\Delta x' = \gamma \Delta x \tag{11}$$

**En el referencial en que una barra se ve fija, su longitud (longitud propia) es mayor que la que se mide en un referencial respecto del cual la barra se mueve.**

## VI | COMPOSICIÓN RELATIVISTA DE VELOCIDADES

Así como fue posible partiendo de la geometría hiperbólica llegar a las transformaciones de Lorentz y sus consecuencias inmediatas en distancias y tiempos, también es factible obtener la ley relativista de composición de velocidades a partir de un “camino geométrico”.

### 1 | Ecuación de una recta en un plano con base no ortogonal

Como se verá enseguida, necesitaremos como base previa para llegar a la expresión final, la ecuación de una recta en un plano de base no ortogonal (el minkowskiano, representativo de un referencial móvil) Nos servirá simplemente la ecuación de una recta que pasa por el origen (de color verde, en la figura adjunta) (Synge (1956)). Si  $\vec{v}$  es un vector director y  $\vec{r}$ , uno que determina la posición de cualquier punto en la recta, podemos escribir (como es habitual cuando se hace este tipo de cálculos):

1. La ecuación vectorial de la recta  $\vec{r} = u\vec{v}$ , donde  $u$  es un parámetro libre que cambia conforme necesitamos referirnos a uno u otro punto en la recta.



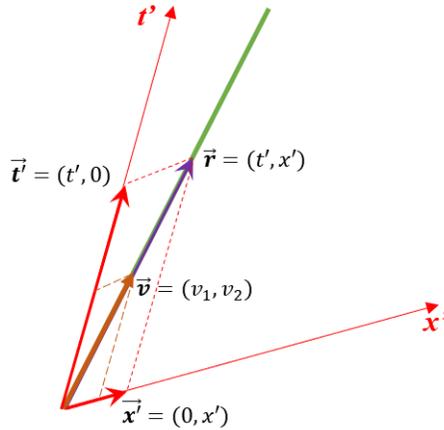


Figura 10

Además, ocurre que los dos triángulos azules son semejantes pues tienen en común la igualdad de dos de sus ángulos (el recto y el llamado  $\alpha$  que coincide con el agudo formado por  $q$  y  $b'$ ).

De esto concluimos la proporcionalidad de los lados:

$$\frac{b'}{a'} = \frac{q}{a} = \frac{p}{b} \tag{17}$$

Dividimos numerador y denominador entre  $a$  en (16), y leemos:

$$\beta'' = \frac{(b/a + q/a)/(1+p/a)}{1 + (p/b)(b/a)} \xrightarrow{\text{o sencillamente}} \boxed{\beta'' = \frac{\beta + \beta'}{1 + \beta\beta'}}$$

Llegamos a la conocida fórmula de adición relativista de velocidades.

Es claro que, vía relaciones hiperbólicas, el trabajo hubiera sido más rápido: De: (2)  $\beta = \tanh(\alpha_{hip})$ ;  $\beta' = \tanh(\alpha'_{hip})$  y  $\beta'' = \tanh(\alpha_{hip} + \alpha'_{hip})$ . Y con la ecuación para la tangente hiperbólica de un ángulo suma:  $\tanh(\alpha_{hip} + \alpha'_{hip}) = \frac{\tanh \alpha_{hip} + \tanh \alpha'_{hip}}{1 + \tanh \alpha_{hip} \tanh \alpha'_{hip}}$  Al sustituir las tangentes hiperbólicas por las velocidades alcanzamos igualmente la fórmula de adición relativista. (Wikipedia (s.f.)) (Zimmer (2008))

## VII | CONCLUSIÓN

Hemos visto en el artículo un procedimiento “inverso” para llegar a los resultados básicos de la Relatividad restringida.

El espacio minkowskiano y las hipérbolas equiláteras construibles en él nos llevan, vía geometría básica (usando también relaciones sencillas para ángulos hiperbólicos) a las expresiones de las transformacio-

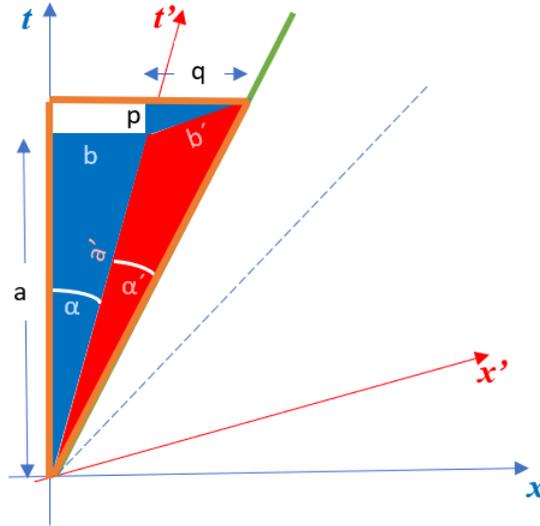


Figura 11

nes de Lorentz, a las expresiones de dilatación y contracción y a la fórmula relativista de adición de velocidades.

Dejando claro, como se dijo en el resumen introductorio, la lógica superior “potencia” de demostración mediante grupo de Lorentz o Poincaré. Pero, entendiendo, por otro lado, la mayor sencillez de este camino nuestro, en orden a mostrar un procedimiento alternativo pensando también en objetivos pedagógicos.

## REFERENCIAS

- Greiner. (2004). *Classical mechanics: Point particles and relativity*. New York: Springer Verlag.
- Russell, H. (2006). *Simultaneity, time dilation and length contraction using minkowski diagrams and lorentz transformations*. Docsity.
- Schutz, B. (2003). *A first course in general relativity* (2a. ed ed.). Cambridge: Cambridge University Press.
- Suzuki, M. (2012, Enero). *Minkowski space-time diagram in the special relativity*. Descargado de <https://bingweb.binghamton.edu/>
- Synge, J. (1956). *Relativity: The special theory*. Amsterdam: North Holland Publishing Company.
- Wikipedia. (s.f.). *Hyperbolic functions*. Descargado de [https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic\\_functions](https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_functions)
- Zimmer, W. (2008). *A geometric introduction to spacetime and special relativity*. Docsity. California State University.