



# Identificación aproximada de señales en reconocimiento de patrones mediante la descomposición en modo dinámico (DMD) y la teoría de Koopman

## Approximate Signal Identification in Pattern Recognition Using Dynamic Mode Decomposition (DMD) and Koopman theory

W. FUNEZ<sup>1</sup>

Recibido: 30 de mayo de 2021 / Aceptado: 3 de noviembre de 2021

<sup>1</sup>Escuela de Matemáticas y Ciencias de la Computación, Universidad Nacional Autónoma de Honduras willianfunezcr9@hotmail.com

### RESUMEN

En este trabajo aplicamos un sistema de identificación de señales que utiliza el algoritmo de descomposición en modo dinámico (DMD), se basa en la descomposición ortogonal adecuada (POD), que utiliza la descomposición en valores singulares (SVD) computacionalmente eficiente de modo que escala bien para proporcionar reducción de dimensionalidad en sistemas de alta dimensión. La DMD es una técnica que permite extraer las características de flujo dinámicamente relevantes de datos experimentales o numéricos para esto se realiza una comparación con la técnica de análisis de componentes principales (PCA) y se muestra que los resultados obtenidos por la DMD son muy buenos. También consideramos la aplicación de la teoría de Koopman a la ecuación diferencial parcial no lineal de Schrödinger donde demostramos que los observables elegidos para construir el operador de Koopman son fundamentales para permitir una buena aproximación a la dinámica no lineal. Si se pueden encontrar tales observables, entonces se puede aplicar el algoritmo de descomposición en modo dinámico para calcular una aproximación de dimensión finita del operador de Koopman, incluidas sus funciones propias, valores propios y modos de Koopman.

### ABSTRACT

In this work we apply a signal identification system that uses the dynamic mode decomposition algorithm (DMD), it is based on proper orthogonal decomposition (POD), which uses computationally efficient singular value decomposition (SVD) so that it scales good for providing dimensionality reduction in high dimension systems. DMD is a technique that allows the extraction of dynamically relevant flow characteristics from experimental or numerical data, for which a comparison is made with the principal component analysis (PCA) technique and it is shown that the results obtained by DMD are very good. We also consider the application of Koopman's theory to Schrödinger's nonlinear partial differential equation where we show that the observables chosen to construct the Koopman operator are fundamental to allow a good approximation to nonlinear dynamics. If such observables can be found, then the dynamic mode decomposition algorithm can be applied to compute a finite-dimensional approximation of the Koopman operator, including its eigenfunctions,

\* Esta obra está bajo una licencia Creative Commons Reconocimiento - NoComercial 4.0 Internacional

\* This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License.

eigenvalues, and Koopman modes.

#### **PALABRAS CLAVES**

Descomposición en valores singulares, descomposición en modo dinámico, operador de Koopman.

#### **KEYWORDS**

Singular value decomposition, dynamic mode decomposition, koopman operator.

## **I | INTRODUCCIÓN**

La importancia de este trabajo recae en la creciente intersección de los métodos basados en datos para caracterizar sistemas complejos en física, ingeniería, biológica, optimización, estadística y otros temas de la matemática. Estos métodos tienen como objetivo descubrir y explotar un subconjunto relativamente pequeño del espacio completo donde se pueden usar modelos de baja dimensión para describir la evolución del sistema.

El descubrimiento basado en datos está revolucionando actualmente la forma en que modelamos, predecimos y controlamos sistemas complejos. Los problemas científicos y de ingeniería más apremiantes de la era moderna no son basados en principios básicos, esto hace que cada vez más que los investigadores recurren a enfoques basados en datos para una amplia gama de sistemas complejos como, la turbulencia, el cerebro, el clima, la epidemiología, las finanzas, la robótica, la autonomía, entre otros Kutz (2013). Estos sistemas son típicamente no lineales, dinámicos, de escala múltiple en espacio y tiempo, de alta dimensión, con patrones dominantes que deben ser modelados para el objetivo eventual de identificación, detección, predicción, estimación y control Golub (1996); Trefethen y Bau (1997). Por lo tanto, las soluciones a menudo se pueden aproximar a través de métodos de reducción de dimensionalidad donde si  $n$  es la dimensión del sistema original de alta dimensión y  $r$  es la dimensión del subespacio donde la dinámica está incorporada, entonces  $r \ll n$  Vides (2019). Más recientemente, la descomposición en modo dinámico (DMD), y su generalización de Koopman, han llamado la atención debido al hecho de que pueden primero descubrir patrones espacio-temporales de actividad de bajo rango, y segundo pueden incorporar la dinámica en el subespacio de una manera libre de ecuaciones. En este trabajo, demostramos que la arquitectura de Koopman puede producir aproximaciones precisas de baja dimensión para ecuaciones diferenciales parciales no lineal. Es fundamental para su éxito una elección adecuada de observables, que se demuestra que actúa como un método de aprendizaje múltiple no lineal. Demostramos el éxito del método y lo comparamos con la DMD para esto se utiliza la ecuación no lineal de Schrödinger.

El método DMD tiene rica historia, que va desde los primeros trabajos de desarrollo de los fundamentos teóricos hasta los trabajos modernos, este método se originó en la comunidad de dinámica de fluidos como una técnica basada en principios para descomponer flujos complejos en una representación simple basada en estructuras coherentes espacio-temporales de bajo rango. Schmid en Schmid (2010) primero definió el algoritmo DMD y demostró su capacidad para proporcionar información físicamente interpretable a partir de datos de fluidos de alta dimensión. El creciente éxito de DMD se debe al hecho de que es un método libre de ecuaciones y basado en datos capaz de proporcionar una descomposición precisa de un sistema complejo en estructuras coherentes espacio-temporales que pueden usarse para análisis de diagnóstico, estado futuro a corto plazo, identificación y control. Es importante destacar

que Rowley en Rowley (2009) mostró que DMD está conectado a la dinámica no lineal a través de la teoría del operador de Koopman ver Koopman (1931) y es interpretable usando técnicas de sistemas dinámicos estándar Mezić (2005). Específicamente, el algoritmo DMD es una manifestación de la teoría de Koopman cuando las funciones observables son la identidad o transformaciones lineales del espacio de estados. Por tanto, DMD es una arquitectura algorítmica basada en principios que permite una aproximación explícita del operador de Koopman.

La aproximación del operador de Koopman a través de DMD es de vital importancia para permitir la evaluación del operador a partir de los datos. De hecho, transforma la teoría de Koopman de una concepción de matemática abstracta a una computación fácilmente manejable. También se destaca el importante papel desempeñado por los observables y sus variedades de evolución asociadas. En particular, se puede pensar que las ecuaciones diferenciales parciales no lineales evolucionan en variedades que a menudo son difíciles de caracterizar y rara vez se conocen analíticamente. Una elección correcta de observables puede, en algunos casos, linealizar la variedad no lineal. Independientemente, los observables elegidos con criterio pueden ayudar a transformar una ecuación diferencial parcial que evoluciona en una variedad fuertemente no lineal a una variedad débilmente no lineal, lo que permite un rango de aplicabilidad más preciso y más amplio de la aproximación de Koopman.

El trabajo presentado a continuación se ha organizado de la siguiente forma. En la sección 2 se presenta algunos preliminares que sirven de base para el trabajo. En la sección 3 definimos la descomposición en modo dinámico, así como su algoritmo. En la sección 4 presentamos DMD en observables no lineales, así como definiciones y teoremas relevantes para este trabajo además el algoritmo de Koopman. En la sección 5 se presenta dos experimentos numéricos, en el primero se realiza la comparación de DMD con PCA para dos señales espacio-temporales mixtas, en el segundo se ilustra la descomposición de Koopman en relación con la DMD, considerando la ecuación no lineal de Schrödinger (NLS). Por último en la sección 6 realizamos las conclusiones más relevantes.

## II | PRELIMINARES

Como en este trabajo la información que necesitamos requiere ser almacenada en una matriz  $A$ , que a su vez el propósito principal es identificar la información de dicha matriz, se hará uso de la técnica de SVD. En términos generales la SVD es una factorización matricial que nos proporciona ciertas características de la matriz  $A$ , también es una generalización del teorema espectral, ya que en este caso podemos hacer la descomposición para cualquier matriz rectangular y no simétrica, nos permite describir el mapeo lineal asociado a la matriz  $A$  mediante el sistema  $Ax = b$ .

En términos generales para cualquier matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  se puede obtener una factorización de la forma  $A = U\Sigma V^T$ , donde  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $V \in \mathbb{R}^{m \times m}$  son matrices ortogonales y  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$  son los valores singulares de  $A$ , se tiene que  $r = \text{rank}A$ , esto equivale al Teorema 2.6.3 de Horn (1986). Una vez obtenida la SVD es posible acceder a una gran cantidad de información de la matriz  $A$ , por ejemplo el rango de la matriz, la norma espectral y el número de condición Golub (1996); Horn (1986). También podemos resolver sistemas de ecuaciones que consideren a la matriz  $A$  como la matriz de coeficientes y es importante en algunos problemas de optimización, estos problemas nos ayudarán a obtener una mejor aproximación de “low-rank”.

Otra propiedad que se puede extraer de la SVD es la asociada con sus normas, ya que para la SVD los valores singulares juegan un papel muy importante, se tendrá que hacer uso de lo siguiente Horn

(1986):

$$\text{I) Norma Espectral: } \|A\|_2 = \sigma_1 \quad (1)$$

$$\text{II) Norma de Frobenius: } \|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \quad (2)$$

El análisis de componentes principales (PCA) transforma un conjunto de datos obtenidos de variables posiblemente correlacionadas en un conjunto de valores de variables no correlacionadas llamadas componentes principales Kutz (2013). El número de componentes puede ser menor o igual al número de variables originales. La primera componente principal tiene la varianza más alta posible, y cada uno de las componentes siguientes tiene la varianza más alta posible bajo la restricción de que debe ser ortogonal a la componente anterior. Se desea encontrar las componentes principales, en este trabajo PCA extrae estructuras modales contenidas en la matriz de datos  $A$ .

En la siguiente sección se presenta la descomposición en modo dinámico, su definición y algoritmo.

### III | DESCOMPOSICIÓN EN MODO DINÁMICO

El método DMD proporciona una descomposición espacio-temporal de datos en un conjunto de modos dinámicos que se derivan de mediciones de un sistema dado en el tiempo. Las matemáticas detras de la extracción de información dinámica resuelta en el tiempo están estrechamente relacionadas con la idea del algoritmo de Arnoldi Schmid (2010), uno de los caballos de batalla de los solucionadores computacionales rápidos. El proceso de recolección de datos involucra dos parámetros Brunton y Kutz (2014):

$n$  = número de puntos espaciales guardados por mediciones de tiempo

$m$  = número de mediciones tomadas.

**Definition 1.** Si se considera un sistema dinámico descrito por la ecuación  $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}, t)$  y dos conjuntos de datos,

$$X = [x_1, x_2, \dots, x_{m-1}]$$

$$X' = [x_2, x_3, \dots, x_m],$$

la DMD calcula la descomposición espectral principal (es decir valores y vectores propios) del operador lineal de mejor ajuste  $A$  que relaciona los datos:

$$X' \approx AX,$$

el operador  $A$  de mejor ajuste establece entonces un sistema dinámico lineal que mejor hace avanzar las mediciones en el tiempo. Si suponemos un muestreo uniforme en el tiempo, esto se convierte en:

$$x_{k+1} \approx Ax_k.$$

Matemáticamente, el operador de mejor ajuste de  $A$  se define de la siguiente forma:

$$A = \operatorname{argmin}_A \|X' - AX\|_F = X'X^\dagger, \quad (3)$$

donde  $\|\cdot\|_F$  es la norma de Frobenius y  $\dagger$  denota la pseudoinversa.

## I El algoritmo de DMD

En la práctica, cuando la dimensión de estado  $n$  es grande, la matriz  $A$  puede resultar difícil de analizar directamente. En cambio, DMD evita la descomposición propia de  $A$  al considerar una representación de rango reducido en términos de una matriz  $\tilde{A}$  proyectada por POD. El algoritmo DMD, está dado por los siguientes pasos Brunton y Kutz (2014):

1. Calculamos la descomposición en valores singulares (SVD) de  $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$  Trefethen y Bau (1997):

$$X \approx \tilde{U} \tilde{\Sigma} \tilde{V}^*, \quad (4)$$

donde  $*$  denota la transpuesta conjugada,  $\tilde{U} \in \mathbb{C}^{n \times r}$ ,  $\tilde{\Sigma} \in \mathbb{C}^{r \times r}$  y  $\tilde{V} \in \mathbb{C}^{m \times r}$  con  $r \leq m$ . Las columnas de  $\tilde{U}$  son ortonormales es decir satisfacen que  $\tilde{U}^* \tilde{U} = I$ , de manera similar  $\tilde{V}^* \tilde{V} = I$ . La reducción de SVD en 4 se aprovecha en esta etapa del algoritmo para realizar un truncamiento de "low-rank" de los datos. Específicamente, si la estructura de baja dimensión está presente en los datos, los valores singulares de  $\tilde{\Sigma}$  disminuirán bruscamente a cero con quizás solo un número limitado de modos dominantes.

2. La matriz  $A$  de 3 se puede obtener utilizando La pseudoinversa de  $X$  a través de la SVD:

$$A = X' \tilde{V} \tilde{\Sigma}^{-1} \tilde{U}^*.$$

En la práctica, es más eficiente computacionalmente calcular  $\tilde{A}$ , la proyección  $r \times r$  de la matriz completa  $A$ , es decir solo estamos interesados en los  $r$  valores propios y los vectores propios principales de  $A$ , por lo que podemos proyectar  $A$  en los modos POD en  $U$ .

$$\tilde{A} = U^* X' V \Sigma^{-1} = U^* A U.$$

La matriz  $\tilde{A}$  define un modelo lineal de baja dimensión del sistema dinámico en coordenadas POD:

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{A} \tilde{x}_k.$$

Notar que es posible reconstruir el estado de alta dimensión  $x_k = \tilde{U} \tilde{x}_k$ .

3. Calculamos la descomposición espectral de  $\tilde{A}$ :

$$\tilde{A} W = W D,$$

donde las entradas de la matriz diagonal  $D$  son los valores propios de la DMD, que también corresponden a los valores propios de la matriz  $A$  completa, las columnas de  $W$  son vectores propios de  $\tilde{A}$

4. Podemos reconstruir la descomposición espectral de  $A$  a partir de  $W$  y  $D$ . En particular, los valores propios de  $A$  están dados por  $D$  y los vectores propios de  $A$  (modos DMD) están dados por columnas de  $\Phi$ :

$$\Phi = X' \tilde{V} \Sigma^{-1} W.$$

Con lo antes mencionado en esta sección se procede en el experimento numérico 1 de la sección 5 a realizar una comparación de DMD con PCA. En la siguiente sección se presenta DMD en observables no lineales donde se postulan conceptos fundamentales detrás del operador de Koopman y será de mucha importancia para el desarrollo del experimento numérico 2, en el cual se toma la ecuación no lineal de Schrödinger (NLS) para demostrar que la descomposición de Koopman puede mejorar en gran medida la identificación y la predicción del estado futuro de los datos. Pero un observable adecuado es fundamental para que esto suceda.

#### IV | DMD EN OBSERVABLES NO LINEALES

Haciendo uso de la teoría espectral, podemos proceder a postular el concepto fundamental detrás del operador de Koopman. El trabajo original de Koopman en Koopman (1931) consideró los sistemas hamiltonianos y formuló el operador de Koopman en tiempo discreto; sin embargo, comenzamos con tiempo continuo y luego derivamos la formulación asociada de tiempo discreto.

**Definition 2** (Operador de Koopman). Si se considera un sistema dinámico de tiempo continuo descrito por la ecuación

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (5)$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$  es un estado en una variedad  $\mathcal{M}$  suave de  $n$  dimensiones. El operador de Koopman  $\mathcal{K}$  es un operador lineal de dimensión infinita que actúa sobre todas las funciones observables  $g : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$ , así que se tiene

$$\mathcal{K}g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{f}(\mathbf{x})).$$

Poco después del artículo original, Koopman y von Neumann extendieron estos resultados a sistemas dinámicos con espectros continuos en Koopman y v. Neumann (1932).

**Theorem 1** (Descomposición en modo Koopman y DMD). Sea  $\Phi_k$  una función propia de  $\mathcal{K}$  con valor propio  $\lambda_k$ , y suponga que  $\Phi_k \in \text{span}\{g_j\}$ , de modo que

$$\Phi_k(x) = w_1 g_1(\mathbf{x}) + w_2 g_2(\mathbf{x}) + \cdots + w_q g_q(\mathbf{x}) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{g}$$

para algunos  $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_q]^T \in \mathbb{C}^q$ . Si  $\mathbf{w} \in R(Y)$ , donde  $R$  es el rango entonces  $\mathbf{w}$  es un vector propio de  $A_Y$  con valor propio  $\lambda_k$  de modo que  $\tilde{\mathbf{w}}^* A_Y = \lambda_k \tilde{\mathbf{w}}^*$ .

#### 1 El algoritmo de Koopman

A continuación se muestra cómo utilizar los datos y los observables para producir un operador de Koopman y una predicción del estado futuro de la evolución no lineal 5. Debería compararse con el algoritmo DMD. Esencialmente, El algoritmo de Koopman simplemente aplica DMD en el espacio de los observables, el cual está dado por los siguientes pasos:

1. Primero, a partir de las matrices de datos  $X$  y  $X'$ , creamos las matrices de datos de los observables  $Y$  y  $Y'$ :

$$Y = [\mathbf{g}(\mathbf{x}_1), \mathbf{g}(\mathbf{x}_2), \dots, \mathbf{g}(\mathbf{x}_{m-1})]$$

$$Y' = [\mathbf{g}(\mathbf{x}'_1), \mathbf{g}(\mathbf{x}'_2), \dots, \mathbf{g}(\mathbf{x}'_{m-1})],$$

donde cada columna es dada por  $y_k = \mathbf{g}(\mathbf{x}_k)$  o  $y'_k = \mathbf{g}(\mathbf{x}'_k)$

2. Utilizando el algoritmo DMD para calcular

$$A_Y = Y'Y^+,$$

junto con la contraparte de rango bajo  $\tilde{A}_Y$ . Los valores propios y vectores propios de  $A_Y$  pueden aproximarse a los valores propios y modos de Koopman, dependiendo del conjunto de observables elegidos, es decir si los observables están bien elegidos.

3. DMD se puede utilizar para calcular los modos aumentados  $\Phi_Y$ , que pueden aproximarse a los modos Koopman (ver el paso 4 en el algoritmo DMD)

$$\Phi_Y = Y'V\Sigma^{-1}W,$$

donde  $W$  proviene del problema de valores propios  $\tilde{A}_Y W = W D$  y  $Y = U\Sigma V^*$ .

4. El estado futuro en el espacio de los observables viene dado por la evolución lineal

$$y(t) = \Phi_Y \text{diag}(\exp(\omega t)) b$$

donde  $b = \Phi_Y^+ y_1$  se determina proyectando hacia los datos iniciales observables, y  $\omega$  son el conjunto de valores propios  $\lambda_k$  generados a partir de la matriz  $D$ , donde  $\omega_k = \ln(\lambda_k)/\Delta t$ .

5. Transformación de observables al nuevo espacio de estado:

$$y_k = \mathbf{g}(\mathbf{x}_k) \implies x_k = \mathbf{g}^{-1}(y_k).$$

Este último paso puede ser trivial si uno de los observables seleccionados para comprender  $g(x_k)$  es la propia variable de estado  $x_k$ . Si solo se eligen observables no lineales de  $x_k$ , entonces el proceso de inversión puede ser difícil.

Este proceso muestra que el algoritmo DMD está estrechamente relacionado con el operador de Koopman. De hecho, es la pieza fundamental para la evaluación práctica del operador de Koopman de dimensión finita. Se enfatiza una vez más aquí: la selección de observables apropiados es crítica para que el algoritmo genere buenas reconstrucciones y aproximaciones al estado futuro.

En la siguiente sección mediante las técnicas descritas en las secciones anteriores, se muestra las aplicaciones de la descomposición en modo dinámico, junto con la teoría de Koopman, para la identificación aproximada de señales en reconocimiento de patrones.

## V | APLICACIONES

### 1 | Experimento Numérico 1

Mediante la técnica descrita en las secciones anteriores para demostrar el algoritmo DMD, se considera el experimento numérico de dos señales espacio-temporales mixtas. En particular, el objetivo es demostrar la capacidad de DMD para descomponer eficientemente la señal. Las dos señales de interés son:

$$\begin{aligned} f(x, t) &= f_1(x, t) + f_2(x, t) \\ &= \text{sech}(x - \pi) e^{i2.3t} + 2\text{sech}(x) \tanh(x) e^{i2.8t}. \end{aligned}$$

Las señales espacio-temporales individuales  $f_1(x, t)$  y  $f_2(x, t)$  se ilustran en la Figura 1(a)-(b). Las dos frecuencias presentes son  $\omega_1 = 2, 3$  y  $\omega_2 = 2, 8$ , que tienen estructuras espaciales distintas. La señal mixta  $f(x, t) = f_1(x, t) + f_2(x, t)$  se ilustra en la Figura 1 (c). Para lo antes mencionado se utiliza el algoritmo DMD el cual nos permite ver de forma grafica los resultados, donde se ingresan los valores de  $n$  y  $m$ , esto mediante GNU Octave con técnicas computacionales utilizadas en Vides (2021), a continuación se muestra algunas partes del código desarrollado en GNU Octave para este experimento numérico.

Con los siguientes valores:

```
>> n=400;
>> m=200;
```

Podemos aplicar el siguiente comando para obtener los resultados mostrados en la Figura 1

```
>> [Phi, omega, lambda, b, Xdmd] = DMDE1(n, m)
err = 4.1367e-12

% ALGUNAS PARTE DEL ALGORITMO DMD EN GNU Octave

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
[U, S, V]=svd(X1, 'econ'); % Paso 1
Atilde=Ur'*X2*Vr/Sr; % Paso 2
[W, D]=eig(Atilde); % Paso 3
Phi=X2*Vr/Sr*W; % Paso 4
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Xdmd=Phi*dintiem;
err=norm(X-Xdmd, 'fro')
```

## 2 | Experimento Numérico 2

Para el siguiente experimento numérico se ilustra la descomposición de Koopman en relación con la DMD, considerando la ecuación no lineal de Schrödinger (NLS)

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + |u|^2 u = 0, \quad (6)$$

donde  $u(\xi, t)$  es una función espacio-tiempo, donde la ecuación se puede reescribir en la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{i}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + i|u|^2 u,$$

para que se pueda aplicar una solución del método espectral. La transformación de Fourier en  $\xi$ , denotada por el símbolo del sombrero, da la ecuación diferencial en las variables de dominio de Fourier  $\tilde{u}$ :

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} = -\frac{ik^2}{2} \tilde{u} + i \widehat{|u|^2 u}.$$

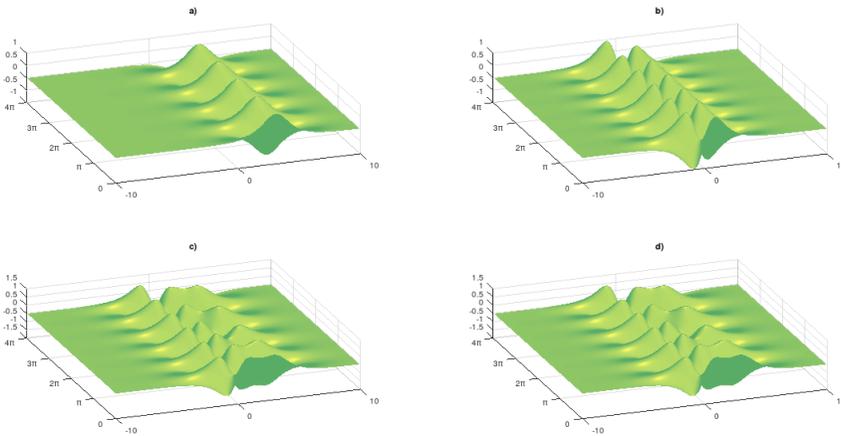


Figura 1: Experimento 1 de dinámica espacio-temporal de dos señales (a)  $f_1(x,t)$ , (b)  $f_2(x,t)$  y la mezcla en (c)  $f(x,t) = f_1(x,t) + f_2(x,t)$ . La función  $f(x,t)$  se puede representar en su lugar por  $x(t)$ . Se calculó la DMD de  $x$ , y en la imagen (d) se muestra una reconstrucción aproximada de rango 2 de la señal  $x_{DMD}(t)$ . La reconstrucción es casi perfecta, con los modos y espectros DMD que coinciden estrechamente las señales  $f_1(x,t)$  y  $f_2(x,t)$ .

Al discretizar en la variable espacial, podemos desarrollar esta ecuación con un algoritmo estándar de pasos en el tiempo, como un integrador de Runge-Kutta de cuarto orden, suponemos que hay un total de 20 porciones de datos en el tiempo en el intervalo  $t \in [0, \pi)$  donde las variables de estado son una discretización  $n$ -dimensional de  $u(\xi, t)$  de modo que  $u(\xi, t_k) \rightarrow \xi_k$ , donde  $n = 512$ . Estas  $\xi_k$  son las columnas de la matriz de datos generada. En este experimento en específico, analizamos la solución de dos solitones que tiene la condición inicial  $u(\xi, 0) = 2\text{sech}(\xi)$  el resultado de esta simulación se muestra en la Figura 3 (a). El algoritmo DMD descrito en las secciones anteriores nos proporciona una aproximación de rango bajo ( $r = 10$ ), la Figura 3 (b) muestra la aproximación DMD lograda.

Para lo antes mencionado se muestra algunas partes del algoritmo de DMD y algoritmo de Koopman que genera una aproximación numérica a la solución de 6, esto mediante GNU Octave con técnicas computacionales utilizadas en Vides (2021).

Con los siguientes valores:

```
L=30; n=512; % Longitud del dominio y # puntos
% Discretización en el tiempo
slices=20;
t=linspace(0,pi,slices+1); dt=t(2)-t(1);
% Condiciones iniciales
N=2;
u=N*(sech(x)).';
ut=fft(u);
% Resuelve con Runge - Kutta
[t,utsol]=ode45('DMD_soliton',t,ut,[],k);
```

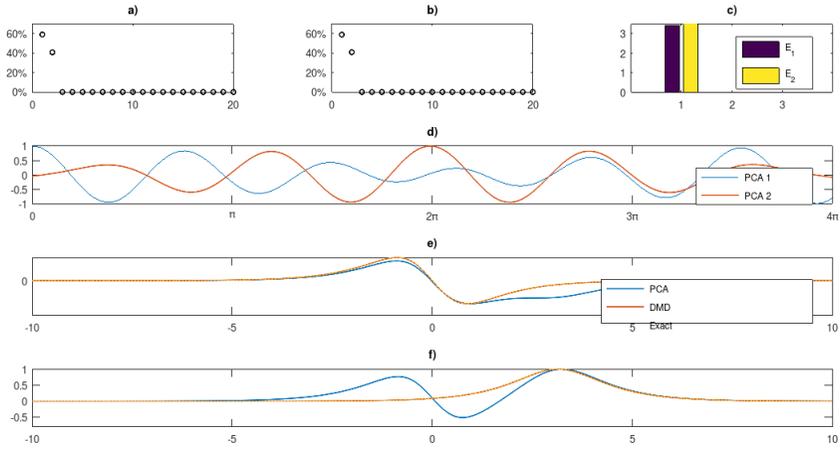


Figura 2: En las imágenes se muestra una comparación de DMD con PCA aplicada a los datos del experimento 1. Los valores singulares en (a) y (b) muestran que un truncamiento de rango 2 es apropiado. Las imágenes (d) - (f) comparan los aspectos temporales y espaciales de los dos modos, donde los modos verdaderos se grafican junto con los modos extraídos por DMD y PCA de los datos. DMD produce resultados que están exactamente (con precisión numérica) alineados con la verdadera solución. Los modos PCA se desvían de la verdadera solución. La diferencia de la norma-2 1 entre los dos modos espaciales verdaderos y los modos extraídos por DMD y PCA se muestran en (c). Los modos DMD coinciden exactamente con los modos verdaderos y no tienen ningún error.

```
% ALGUNAS PARTE DEL ALGORITMO DMD EN GNU Octave
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Koopman %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
[U2,Sigma2,V2] = svd(Y1,'econ'); % Paso 1
Atilde = U'*Y2*V/Sigma; % Paso 2
[W,D] = eig(Atilde); % Paso 3
Phi2=Y2*V/Sigma*W; % Paso 4
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
u_dmd2 = Phi2*u_modes;
```

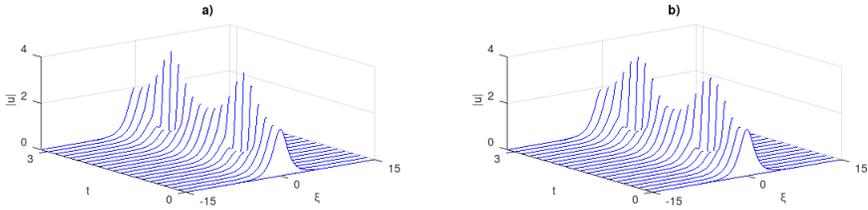


Figura 3: Experimento 2 de la ecuación no lineal de Schrödinger (NLS) 4 donde en la imagen (a) se muestra la simulación completa. La aproximación se muestra en la imagen (b) usando el algoritmo de DMD.

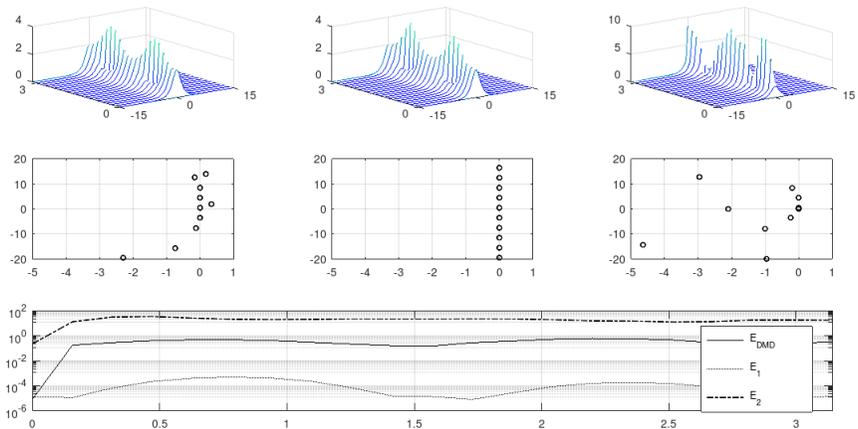


Figura 4: En la imagen anterior se muestran las funciones propias de Koopman y distribución de valores propios para las tres observables considerados en los incisos (a)-(c), el algoritmo de DMD es dado por  $\mathbf{g}_{DMD}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  donde  $\mathbf{x} = u(\xi, t_k)$  y  $\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}, |\mathbf{x}|^2 \mathbf{x}]^T$ ,  $\mathbf{g}_2(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}, |\mathbf{x}|^2]^T$ . Tener en cuenta que el observable  $\mathbf{g}_1(\mathbf{x})$  da la mejor aproximación al espectro esperado de valores propios puramente imaginarios. También el análisis de errores de la reconstrucción de Koopman de los datos simulados, los tres observables considerados se comparan con la solución verdadera, el observable correspondiente a la teoría de DMD esta dado por  $\mathbf{g}_{DMD}(\mathbf{x})$ , y produce el error  $E_{DMD}$ , los observables  $\mathbf{g}_1(\mathbf{x})$  y  $\mathbf{g}_2(\mathbf{x})$  producen errores  $E_1$  y  $E_2$ , respectivamente.

En la siguiente sección se presenta las conclusiones más relevantes realizadas para resolver la Identificación aproximada de señales en reconocimiento de patrones utilizando la descomposición en modo dinámico y la teoría de Koopman.

## VI | CONCLUSIONES

En este trabajo se demostró que la aplicación de la descomposición en modo dinámico (DMD) y la teoría de Koopman pueden mejorar en gran medida la reconstrucción, identificación y la predicción del estado futuro de los datos. Pero un observable adecuado es fundamental para que esto suceda. Para la ecuación

diferencial parcial no lineal de Schrödinger (NLS), se puede adivinar un buen observable por la forma de la ecuación. Sin embargo, tal lujo rara vez se permite en sistemas donde no se conoce la dinámica. De hecho, las funciones y los valores propios de Koopman de los tres observables considerados en el experimento proporcionan una aproximación que es casi equivalente a la precisión de la simulación numérica en sí. Los resultados presentados en este trabajo son convincentes, destacando la perspectiva más amplia del método Koopman en general. Específicamente, el éxito del método dependerá de la selección de observables como ya se mencionó anteriormente, la forma de la ecuación gobernante, o la información sobre la variedad en la que existen los datos pueden aprovecharse para construir observables adecuados, entonces la teoría de Koopman debería proporcionar un método transformador para los datos no lineales. Debido a la importancia de identificar observables significativos, esta es un área de investigación en crecimiento, especialmente dados los nuevos desarrollos en el machine learning que pueden proporcionar un enfoque sólido para investigaciones futuras.

## I REFERENCIAS

- Brunton, S. L., y Kutz, J. N. (2014). On dynamic mode decomposition: Theory and applications. *Nonlinear Dynamics*, 1(2), 391-421.
- Golub, G. H. (1996). *Matrix computations*. USA: Johns Hopkins University Press.
- Horn, R. A. (1986). *Topics in matrix analysis*. USA: Cambridge University Press.
- Koopman, B. O. (1931). Hamiltonian systems and transformation in hilbert space. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 17(5), 315-318.
- Koopman, B. O., y v. Neumann, J. (1932). Dynamical systems of continuous spectra. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 18(3), 255-263.
- Kutz, N. (2013). *Data-driven modeling scientific computation. methods for complex systems big data*. Oxford: Oxford University Press.
- Mezić, I. (2005). Spectral properties of dynamical systems, model reduction and decompositions. *Nonlinear Dynamics*, 41(3), 309-325.
- Rowley, C. W. (2009). Spectral analysis of nonlinear flows. *J. Fluid Mech.*, 641, 1-13.
- Schmid, P. (2010). Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data. *Journal of Fluid Mechanics*, 656, 5-28.
- Trefethen, L. N., y Bau, D. (1997). *Matrix computations*. USA: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM).
- Vides, F. (2019). On cyclic finite-state approximation of data-driven systems. *IEEEExplore CONCAPAN 2019*.
- Vides, F. (2021). *Númericos y modelación computacional*. Honduras. <https://cadds-lab.github.io/HPCModeling.html>.