



Aproximaciones de un modelo espacial para el ciclo global del carbono usando el método de elemento finito

Approximations of a spatial model for the global carbon cycle using the finite element method

M. GONZÁLEZ-ORELLANA^{1,†}

Recibido: 12 de noviembre de 2020 / Aceptado: 7 de enero de 2021

RESUMEN

Se plantea un modelo analítico para el ciclo global de carbono propuesto por Lade et al. en (Lade y cols., 2018), con la novedad de incorporar en su estructura información espacial en una variable y una componente difusiva para tres de las cuatro variables de estado del sistema, a saber, en océanos, atmósfera y temperatura, más no en suelos por lo poco natural que sería considerar la difusión en esta dimensión. Se estiman las aproximaciones para el cambio del flujo de carbono y temperatura por medio del método numérico de elemento finito (MEF), en este aspecto se hace una descripción de la metodología seguida que podría ser muy útil para hacer aproximaciones de otros ciclos biogeoquímicos cruciales en el sistema climático, también se describe el proceso seguido para la validación del código implementado para el MEF. Todas las aproximaciones tienen por umbral temporal el año 2100, por la naturaleza de los valores de los parámetros y los escenarios de emisión de carbono armonizados que se han utilizado.

ABSTRACT

The proposal here presented is an analytical model for global carbon cycle based on Lade et al. Lade y cols. (2018), but with a novel addition of spacial data in one variable and a diffusion component for three of the four state variables of the system which are those in oceans, atmosphere and temperature but not in soils for this is not a dimension where diffusion is meant to be considered in a natural way. The finite element method (FEM) is used to reach estimations on carbon and temperature flow changes. The method used in this work can be useful for other studies on biogeochemical cycles which are crucial for climate system, and that is the main reason to present here the description of such methodology; but also, the process for validation of the implemented code for FEM is described. All approaches are meant to be valid until year 2100, due to the nature of the validity of parameters and scenarios of carbon emissions in which this work has been based.

PALABRAS CLAVES

Flujo de carbono, elemento finito, cambio climático.

KEYWORDS

Carbon flow, finite element, climate change.

¹Departamento de Matemática Aplicada,
Facultad de Ciencias, Universidad Nacional
Autónoma de Honduras.
myrian.gonzalez@unah.edu.hn

* Esta obra está bajo una licencia Creative Commons Reconocimiento - NoComercial 4.0 Internacional

* This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License.

I | INTRODUCCIÓN

Existe evidencia que demuestra la variabilidad climática y el aumento casi generalizado de la temperatura media superficial en los últimos años (IPCC, 2013). La rápida alteración al ciclo global de carbono por parte del factor antropogénico es la principal causa de las perturbaciones actuales del sistema climático (Friedlingstein, 2015), en donde los cambios que inducen los ciclos biogeoquímicos en el sistema son fundamentales y constituyen, a su vez, una de las principales fuentes de incertidumbre (Friedlingstein y cols., 2014).

El ciclo del carbono así como el ciclo del nitrógeno, son ciclos biogeoquímicos cruciales en el sistema climático natural ya que determinan cambios sustanciales en los sumideros naturales de gases de efecto invernadero (GEI) (Ciais y cols., 2014). Se conoce como GEI naturales al vapor de agua, dióxido de carbono (CO_2), metano (CH_4) y óxido nítrico (N_2O), mientras que son artificiales, es decir, producto de la actividad humana, los halocarbonos como los hidrofluorocarbonos (HFC) y perfluorocarbonos (PFC).

En este trabajo, se presenta un modelo analítico del ciclo global del carbono, que incluye consecuentemente el CO_2 , en comunión con un acoplamiento para el cambio de temperatura superficial media (ΔT), además, y como aporte original, se le ha incluido una variable espacial para una dimensión y una componente difusiva, de tal forma que el modelo conserva la forma siguiente

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathcal{F}(\mathbf{u}, t) + \delta \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (1)$$

con \mathbf{u} como el vector de las variables globales del ciclo del carbono para suelos (C_t), capa mixta superior del océano (C_m), atmósfera (C_a) y temperatura (T), \mathcal{F} comprende las funciones que modelan los flujos de carbono y δ es la matriz diagonal de los coeficientes de difusión.

Este modelo fue propuesto por Lade et al. en (Lade y cols., 2018) y se ha construido teniendo como perspectiva directora, en todo su planteamiento, utilizar los valores de parámetros y expresiones matemáticas de mejor confianza, aunque no necesariamente sean los que más se ajusten a los datos históricos. Como ventaja adicional, ofrece la posibilidad de dar un tratamiento analítico para analizar y comprender mejor algunos mecanismos intrínsecos del fenómeno de estudio, como en el caso de procesos importantes y poco estudiados, un ejemplo de ello es dado por las retroalimentaciones de carbono (Roe, 2009). Dos modelos pueden ser considerados precursores, el modelo de Timothy Lenton de (Lenton, 2000) y el modelo de Anderies et al. de (Anderies, Carpenter, Steffen, y Rockström, 2013). Finalmente, se justifica centrar estudios en el carbono por el demostrado efecto que conllevan los cambios en la concentración de carbono atmosférico en el balance energético de la Tierra (Callendar, 1938; Ciais y cols., 2014).

La descripción de las ecuaciones que se han utilizado para modelar los flujos de carbono y cambio de temperatura se detalla en la Sección II. En la Sección III se describe el planteamiento del MEF para las aproximaciones de la solución del sistema. Las simulaciones encontradas a partir de las trayectorias de concentración representativas (RCP en inglés) se muestran gráficamente en la Sección IV y en la Sección V se valida el código que se implementó para encontrar dichas aproximaciones. Algunos comentarios finales se discuten en la Sección VI.

II | DESCRIPCIÓN DEL MODELO

Para cuantificar el carbono en el ciclo global del carbono, como es natural, se asocian magnitudes al reservorio donde este opera, de la misma forma, el sistema se plantea con ecuaciones que describen el flujo de carbono en estos reservorios.

1 | Carbono en suelos

En el suelo, el carbono se ve configurado principalmente por tres procesos: i. *la producción primaria neta (PPN)*, señala la captación de carbono que es sintetizado por los productores primarios a partir de la fotosíntesis; ii. *la respiración del suelo*, que refiere al carbono liberado por los procesos naturales dentro de la tierra, por ejemplo, por la actividad microbiana; y, iii. *la liberación del carbono por el uso del suelo (LUC)* donde se incluyen procesos como la silvicultura (Marianne, Karan, y Heath, 2012). De manera simplificada, el flujo de carbono en suelos se puede representar como sigue

$$\frac{dC_t}{dt} = PPN_0 \left(1 + K_C \log \left(\frac{C_a}{C_{a_0}} \right) - \frac{C_t}{C_{t_0}} Q_R^{\Delta T/10} \right) - LUC(t), \quad (2)$$

en donde los subíndices cero denotan los valores iniciales de las constantes en el preindustrial, es decir, año 1750 y son tales que: $C_{t_0} = 589 \text{ PgC}$ y $C_{m_0} = 900 \text{ PgC}$ según lo reportado en el quinto informe de valuación (AR5 en inglés) del Panel Intergubernamental para el Cambio Climático (IPCC) en (Ciais y cols., 2014); $C_{t_0} = 1875 \text{ PgC}$ según (Lade y cols., 2018) y $\Delta T_0 = 0 \text{ K}$. El efecto de la fertilización generado por la concentración de carbono atmosférico es representado por el coeficiente K_C y varía entre 0.32 y 0.36 (Alexandrov, Oikawa, y Yamagata, 2003). La constante $Q_R = 1.72$ representa la tasa a la cual la materia orgánica se descompone (Xu y Shang, 2016), está determinada por la temperatura y la humedad del suelo.

En la ecuación (2), la expresión $PPN_0(1 + K_C \log(C_a/C_{a_0}))$ cuantifica la absorción de carbono por la biósfera terrestre y los términos $(C_t/C_{t_0})R_0Q_R^{\Delta T/10}$ y $LUC(t)$ restan el carbono liberado por la respiración y el uso del suelo respectivamente. Como se asume un equilibrio de carbono en el preindustrial, entonces $R_0 = PPN_0$ para dicha época.

2 | Carbono en océanos

Cuando el carbono atmosférico es capturado en la superficie, este se ve afectado por diferentes procesos: i. *la bomba física o solubilidad*, cuando el carbono es transportado al fondo del océano por medio de procesos físico-químicos, en este caso cuantificada así $\omega_0(1 - \omega_T \Delta T)(C_m - C_{m_0})$ en donde $\omega_0 = 0.1/\text{año}$ representa la tasa de solubilidad (Ciais y cols., 2014) y $\omega_T = 0.1/\text{K}$ estima la tasa de circulación oceánica (Collins y cols., 2013); ii. *la bomba biológica*, este mecanismo se da por la biología marina a través de la actividad fotosintética de algunos organismos como el fitoplancton y se aproxima con $B(\Delta T) \equiv B_0(1 - B_T \Delta T)$, tal que $B_T = 0.032/\text{K}$ es el coeficiente de la dependencia de la bomba biológica a la temperatura dada en (Lade y cols., 2018). Entonces, el flujo de carbono en el océano se aproxima por

$$\frac{dC_m}{dt} = \frac{D_a C_{m_0}}{r p(C_{m_0}, 0)} (C_a - p(C_m, \Delta T)) - \omega_0(1 - \omega_T \Delta T)(C_m - C_{m_0}) - B(\Delta T) + B(0), \quad (3)$$

tal que la primera expresión representa el carbono que es disuelto en la capa mixta superior del océano,

$p(C_m, \Delta T) \equiv C_{a_0} / (1 - D_T \Delta T) (C_m / C_{m_0})^r$. La constante $D_a = 1/\text{año}$ es el tiempo promedio requerido para alcanzar el equilibrio de difusión océano-atmósfera, $r = 12.5$ es el factor de Revelle (Sabine y cols., 2004; Williams, Goodwin, Roussenov, y Bopp, 2016) y $D_T = 0.0423/K$ el coeficiente de la dependencia de la bomba física a la temperatura (Lade y cols., 2018). Al igual que en la ecuación (2), la ecuación (3) estima el carbono que se almacena en el reservorio, es decir, el carbono remanente en la capa mixta superior al restar las cantidades de carbono que se transportan al océano profundo.

3 | Carbono en atmósfera

Para describir el carbono en océanos, se utiliza un balance común de masa de carbono definido por $C_s = C_t + C_m + C_a$ donde C_s representa el carbono total del sistema. Bajo la hipótesis de que el carbono del sistema permanece en constante intercambio y que solo se modifica por el carbono transportado al fondo del océano y el carbono que es liberado con la combustión fósil, producción de cemento y otros, denotado por la función e , se tiene que $dC_s/dt = e(t) - \omega_0(1 - \omega_T \Delta T)(C_m - C_{m_0}) - B(\Delta T) + B(0)$. Entonces, sustituyendo en el balance de masas, se obtiene la ecuación que determina el intercambio de carbono así

$$\frac{dC_a}{dt} = e(t) - PPN_0 \left(1 + K_c \log \left(\frac{C_a}{C_{a_0}} \right) \right) + \frac{PPN_0}{C_{t_0}} Q_R^{\Delta T/10} + LUC(t) - \frac{D_a C_{m_0}}{r C_{a_0}} (C_a - p(C_m, \Delta T)) \quad (4)$$

4 | Temperatura

El cambio de temperatura en los últimos 100 años es producto de la perturbación de los GEI debido al factor antropogénico, a través del mecanismo conocido como *forzamiento radiativo* (Santamaría, 2010). En este caso, se utilizará una ecuación propuesta en (Kellie-Smith y Cox, 2011) para ΔT definida a continuación

$$\frac{d\Delta T}{dt} = \frac{1}{\tau} \left(\frac{\lambda}{\log 2} \log \left(\frac{C_a}{C_{a_0}} \right) - \Delta T \right) \quad (5)$$

con $\tau = 4$ años y refiere el tiempo respuesta para un retraso climático dado por (Lade y cols., 2018).

Adicionalmente, y como aporte original de este trabajo, se incluye información espacial en una variable y una componente difusiva; por lo tanto, el modelo completo se puede expresar de forma simplificada como sigue

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_t}{\partial t} &= \mathcal{F}_1 \\ \frac{\partial C_m}{\partial t} &= \mathcal{F}_2 + \delta_2 \nabla^2 C_m \\ \frac{\partial C_a}{\partial t} &= \mathcal{F}_3 + \delta_3 \nabla^2 C_a \\ \frac{\partial \Delta T}{\partial t} &= \mathcal{F}_4 + \delta_4 \nabla^2 \Delta T, \end{aligned} \quad (6)$$

tal que \mathcal{F} son las funciones que modelan los flujos de carbono dadas por las ecuaciones (2), (3), (4) y (5). Naturalmente, los cambios en las masas de carbono (PgC) y temperatura (K) se miden con derivadas

parciales por la nueva configuración del modelo con dos variables independientes. El coeficiente de difusión es denotado con δ_i para $i = 1, 2, 3, 4$, tomando a $\delta_1 = 0$ debido a que no es usual que exista la difusión de carbono terrestre y estrictamente positivo en todos los demás casos. En forma aún más compacta el modelo previo se puede condensar como se ha expuesto en la ecuación (1).

III | PLANTEAMIENTO DEL MEF PARA EL MODELO

Se desea aproximar una función $c(x, t)$ en el dominio $[a, b] \times [0, T]$ a través de un espacio finito de funciones \mathcal{G} , esto es:

$$c|_{\Omega_j}(x) \approx \sum_{i=1}^n c_i(t)\phi_i(x), \quad (7)$$

donde $\{\phi_i\}$ representa la base del espacio \mathcal{G} y $\Omega_i = [x_{i-1}, x_{i+1}]$ para $i = 2, \dots, n-1$, además $x_1 = a$, $x_i = x_{i-1} + h$, $x_n = b$ y $\Omega_1 = [x_1, x_2]$, $\Omega_n = [x_{n-1}, x_n]$. En este caso, se define $h = (b-a)/(n-1)$.

La ecuación diferencial parcial del modelo tiene la forma:

$$c_t = F(c, t) + \delta c_{xx}. \quad (8)$$

Como es usual, se escribe la forma débil del problema (8):

$$\int_a^b v c_t dx = \int_a^b v F(c, t) dx + \delta (v c_x|_{[a,b]} - \int_a^b v_x c_x dx), \quad (9)$$

donde la función v pertenece al espacio de funciones \mathcal{G} . Además, se asumirá que $c_x(a, t) = c_x(b, t) = 0$, de esta forma $v c_x|_{[a,b]} = 0$; la ecuación (9) se puede escribir como:

$$\int_a^b v c_t dx = \int_a^b v F(c, t) dx - \delta \int_a^b v_x c_x dx. \quad (10)$$

Si se sustituye c por su aproximación y v por una función de la base de ϕ_k se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \int_a^b \phi_k \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} c_i \phi_i dx &= \int_a^b \phi_k F\left(\sum_{i=1}^n c_i \phi_i, t\right) dx - \delta \int_a^b \phi_k' \sum_{i=1}^n c_i \phi_i' dx, \\ \sum_{i=1}^n \int_a^b \phi_k \phi_i \frac{d}{dt} c_i dx &= \int_a^b \phi_k F\left(\sum_{i=1}^n c_i \phi_i, t\right) dx - \delta \sum_{i=1}^n \int_a^b c_i \phi_k' \phi_i' dx. \end{aligned}$$

En este trabajo se usaron las funciones base mostradas en la Figura 1. De esta manera, se llega a:

$$\sum_{i=k-1}^{k+1} \int_a^b \phi_k \phi_i \frac{d}{dt} c_i dx = \int_a^b \phi_k F\left(\sum_{i=k-1}^{k+1} c_i \phi_i, t\right) dx - \delta \sum_{i=k-1}^{k+1} \int_a^b c_i \phi_k' \phi_i' dx. \quad (11)$$

Se puede probar que la ecuación (11) se puede escribir como el siguiente sistema:

$$A \frac{dC}{dt} = -\frac{\delta}{h^2} BC + \frac{1}{h} \bar{F}(C, t), \quad (12)$$

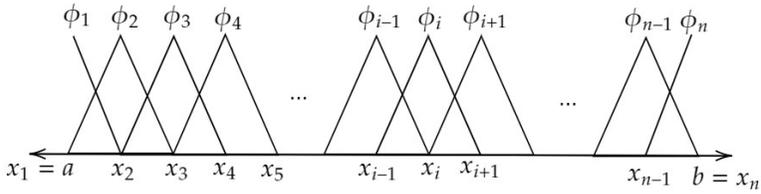


Figura 1: Funciones base lineales del método de elemento finito.

donde:

A : Matriz tridiagonal compuesta por d_c, d_l

$$d_c = [1/3, 2/3, \dots, 2/3, 1/3] \in \mathbb{R}^n,$$

vector de la diagonal central.

$$d_l = [1/6, 1/6, \dots, 1/6] \in \mathbb{R}^{n-1},$$

vector de la diagonal lateral.

B : Matriz tridiagonal compuesta por D_c, D_l

$$D_c = [1, 2, \dots, 2, 1] \in \mathbb{R}^n, \text{ diagonal central.}$$

$$D_l = [-1, -1, \dots, -1] \in \mathbb{R}^{n-1}, \text{ diagonal lateral.}$$

$$C = [c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t)]^T.$$

$$\bar{F}(C, t) = \left[\int_a^b \phi_1 F \left(\sum_{i=1}^2 c_i \phi_i, t \right) dx, \dots, \int_a^b \phi_n F \left(\sum_{i=n-1}^n c_i \phi_i, t \right) dx \right]^T.$$

El sistema (12) es un problema de valor inicial, por lo tanto resta resolver este sistema para poder conocer la solución aproximada a la ecuación (9).

IV | SIMULACIONES DEL FLUJO DE CARBONO

En la Figura 2 se pueden apreciar las soluciones del sistema con difusión (6), es decir cambios en los flujos de carbono entre reservorios y la temperatura, usando el método de elemento finito que se explicó en la Sección III. Para estas estimaciones, se han fijado los parámetros de la siguiente forma: $a = 0$, $b = \pi$, $C_m(x, 0) = C_{m0}$, $C_a(x, 0) = C_{a0} + 100 \cos(2x)$, $C_t(x, 0) = C_{t0}$, $\Delta t(x, 0) = 0$, $\delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = 10^{-3}$. Dada la novedad de los cambios realizados al modelo base, los valores de los coeficientes de difusión no ilustran un mecanismo real del problema físico, sino que persiguen el propósito de profundizar un estudio teórico del modelo como tal.

Se completa el modelo teniendo una expresión para las funciones LUC y e descritas en la Sección II, en este trabajo no se ha considerado una expresión analítica para estas componentes, sino que se utilizaron los valores históricos de emisiones reconstruidas de carbono tomadas del sitio web del *Integrated Carbon Observation System (ICOS)* del Global Carbon Project (ICOS, s.f.) y los cambios históricos de la temperatura del sitio web del *National Center for Environmental Information (NOAA)* (NOAA,

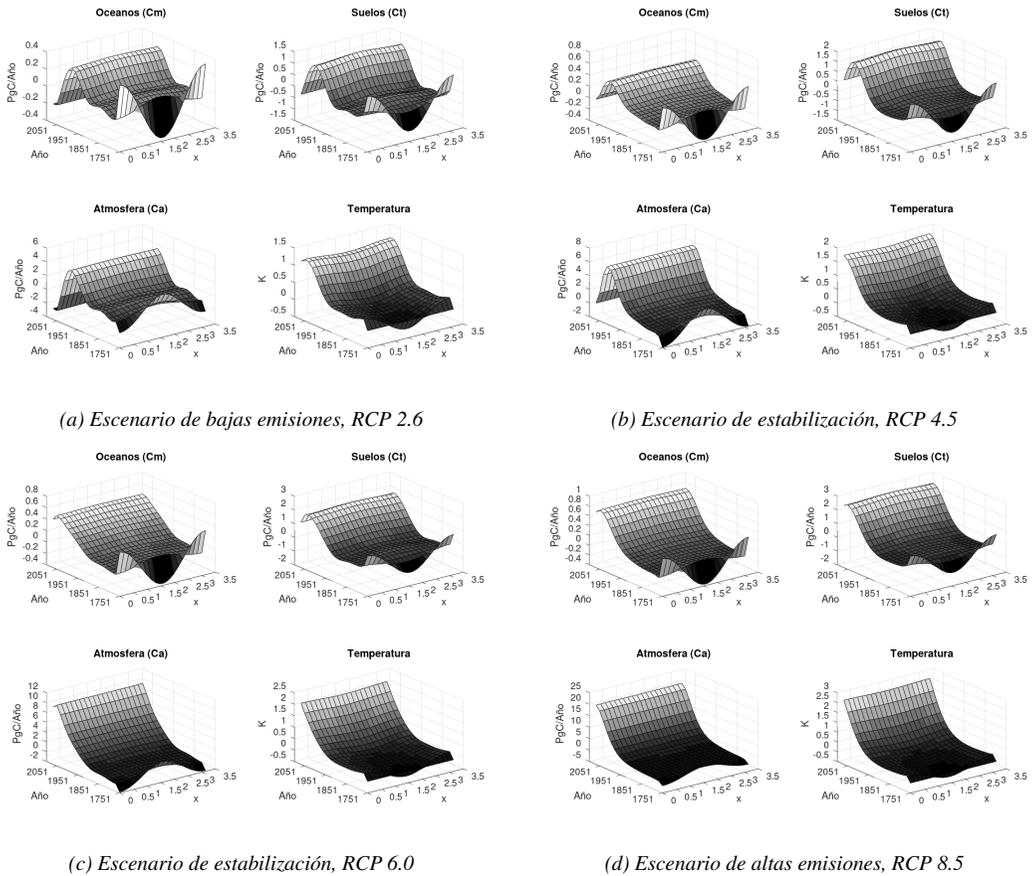


Figura 2: Superficie solución del modelo para diferentes escenarios

s.f.). Para las proyecciones de emisiones de carbono, se utilizaron los escenarios RCP 2.6, 4.5, 6.0 y 8.5 tomados del sitio web del *RCP Scenario data group* del Postdam Institute for Climate Impact Research (PICIR, s.f.), más detalles de los RCP puede consultarse en (Meinshausen y cols., 2011). Todas las proyecciones se limitan hasta el año 2100, como suele ser sugerido en estos modelos, debido al aumento significativo de la incertidumbre de algunos mecanismos y valores de parámetros en fechas posteriores a este umbral (Meinshausen y cols., 2011).

Como observación final, se puede apreciar en las superficies un comportamiento similar al reflejado por las curvas del cambio en la concentración de (Lade y cols., 2018), además de esto, también se refleja la perturbación introducida por el término trigonométrico en la condición inicial de la concentración en atmósfera. Tomando en cuenta que el valor numérico asignado al coeficiente de difusión no fue obtenido bajo ninguna observación *in situ*, en este trabajo no se puede brindar una interpretación física de la inclusión difusiva; sin embargo, se destaca que el aporte teórico del planteamiento y la solución con esta componente, pueden ser muy provechosos para investigaciones posteriores que abarquen fenómenos de esta naturaleza.

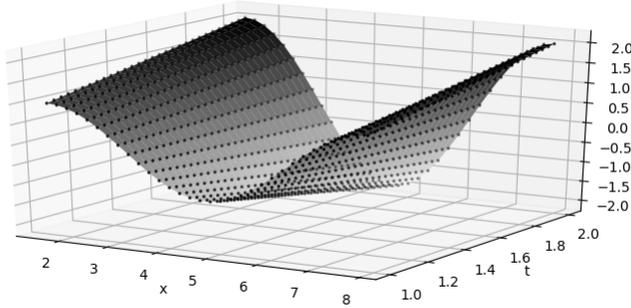


Figura 3: Superficie que aproxima la solución del problema de referencia con el código implementado. Los puntos representan los valores exactos de la solución analítica.

V | VALIDACIÓN DE LA IMPLEMENTACIÓN

En esta sección se expondrá una validación de la implementación de un código elaborado en Python por parte del autor, del método de elemento finito. Suponga que se tiene la el problema de "referencia" definido como sigue

$$\begin{cases} F(c, t) = \frac{c(1 + \delta t)}{t} \\ c(1, x) = \sin(x) \\ (x, t) \in [\pi/2, 5\pi/2] \times [1, 2]. \end{cases} \quad (13)$$

No es difícil verificar que $c(t, x) = t \sin(x)$ es la solución del problema (13) con los parámetros indicados.

En la Figura 3 se presenta una aproximación de la solución al problema, se puede apreciar que la aproximación (la superficie) está visiblemente conteniendo a los puntos negros (solución exacta). Para ratificar completamente el funcionamiento del código implementado, se hizo un experimento de convergencia; se conoce que el orden de aproximación del método de elemento finito, con funciones base lineales, es dos (Johnson, 2012). Con esta información y dado que se conoce la solución real, se obtuvo la Figura 4. A continuación, se dará una breve descripción de la referida figura: se consideraron los saltos en espacio $\Delta x \in \{\pi/2^{-i} | i = 2, \dots, 9\}$, se tomó un tamaño de paso fijo en tiempo $\Delta t = 1/100$, para cada salto Δx se ha calculado el error a través de la norma L_2 , denominado por $\epsilon(\Delta x)$. Finalmente, en la Figura 4 la línea continua representa la ecuación $y = 2 \log_2(\Delta x)$ y la línea intermitente representa la gráfica de los puntos de $(\log_2(\Delta x), \log_2(\epsilon(\Delta x)))$; según indica la teoría se espera que estas dos curvas sean paralelas, lo cual es notablemente visible.

VI | COMENTARIOS FINALES

El acoplamiento del ciclo global del carbono en los modelos climáticos es fundamental para comprender y proyectar de mejor forma el cambio climático futuro (Friedlingstein y cols., 2001), en este sentido, construir modelos más realista del ciclo global del carbono es necesario. En este trabajo, se presentó un modelo que, al incluir una variable espacial, busca acercarse a una estructura más real del fenómeno. Se

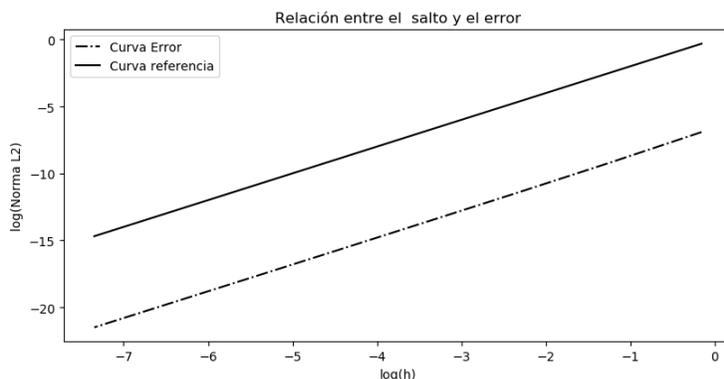


Figura 4: Comportamiento del logaritmo del error en contraste con el logaritmo del salto (tamaño de paso).

puede contrastar las simulaciones obtenidas con las presentadas en (Lade y cols., 2018), en tal situación es apreciable que el MEF ha brindado comparativamente aproximaciones de los flujos de carbono y cambio de temperatura muy precisos. Se destaca que también se obtuvieron valores subestimados del carbono en los océanos como en el modelo base propuesto por Lade et al, esta carencia de aproximación se debe principalmente a la estabilización significativa de los mecanismos que condicionan los flujos de carbono en esta componente y la poca estratificación de las aguas. La inclusión del término de difusión en el modelo base es una sutil mejora; sin embargo, debido a la amplia gama de procesos que podría simular esta componente de difusión, si se sigue trabajando en esta línea de investigación se podrían obtener resultados provechosos para la mejor comprensión del sistema climático.

I REFERENCIAS

- Alexandrov, G., Oikawa, T., y Yamagata, Y. (2003). Climate dependence of the CO₂ fertilization effect on terrestrial net primary production. *Tellus B: Chemical and Physical Meteorology*, 55(2), 669–675.
- Anderies, J. M., Carpenter, S. R., Steffen, W., y Rockström, J. (2013). The topology of non-linear global carbon dynamics: from tipping points to planetary boundaries. *Environmental Research Letters*, 8(4), 044048.
- Callendar, G. S. (1938). The artificial production of carbon dioxide and its influence on temperature. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 64(275), 223–240.
- Ciais, P., Sabine, C., Bala, G., Bopp, L., Brovkin, V., Canadell, J., ... others (2014). Carbon and other biogeochemical cycles. En *Climate change 2013: the physical science basis. contribution of working group i to the fifth assessment report of the intergovernmental panel on climate change* (pp. 465–570). Cambridge University Press.
- Collins, M., Knutti, R., Arblaster, J., Dufresne, J.-L., Fichet, T., Friedlingstein, P., ... others (2013). Long-term climate change: projections, commitments and irreversibility. En *Climate change 2013-the physical science basis: Contribution of working group i to the fifth assessment report of the intergovernmental panel on climate change* (pp. 1029–1136). Cambridge University Press.
- Friedlingstein, P. (2015). Carbon cycle feedbacks and future climate change. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 373(2054), 20140421.
- Friedlingstein, P., Bopp, L., Ciais, P., Dufresne, J.-L., Fairhead, L., LeTreut, H., ... Orr, J. (2001). Positive feedback between future climate change and the carbon cycle. *Geophysical Research Letters*, 28(8), 1543–1546.
- Friedlingstein, P., Meinshausen, M., Arora, V. K., Jones, C. D., Anav, A., Liddicoat, S. K., y Knutti, R. (2014). Uncertainties in CMIP5 climate projections due to carbon cycle feedbacks. *Journal of Climate*, 27(2), 511–526.
- ICOS. (s.f.). *Global carbon budget*. <https://www.globalcarbonproject.org/>

- carbonbudget/. (Accedido en nov-2020)
- IPCC. (2013). *Climate change 2013: The physical science basis: Summary for policy makers; a technical summary and frequently asked questions; a report of working group i of the ipcc*. Cambridge University Press.
- Johnson, C. (2012). *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*. Courier Corporation.
- Kellie-Smith, O., y Cox, P. M. (2011). Emergent dynamics of the climate–economy system in the anthropocene. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 369(1938), 868–886.
- Lade, S., Donges, J. F., Fetzer, I., Anderies, J., Beer, C., Cornell, S., ... others (2018). Analytically tractable climate–carbon cycle feedbacks under 21st century anthropogenic forcing. *Earth System Dynamics*.
- Lenton, T. M. (2000). Land and ocean carbon cycle feedback effects on global warming in a simple earth system model. *Tellus B: Chemical and Physical Meteorology*, 52(5), 1159–1188.
- Marianne, B., Karan, C., y Heath, L. (2012). *Actividades sobre uso de la tierra, cambio del uso de la tierra y silvicultura*. Fondo para el Medio Ambiente Mundial.
- Meinshausen, M., Smith, S. J., Calvin, K., Daniel, J. S., Kainuma, M., Lamarque, J.-F., ... others (2011). The RCP greenhouse gas concentrations and their extensions from 1765 to 2300. *Climatic change*, 109(1-2), 213.
- NOOA. (s.f.). *Anomalias del cambio de temperatura media mundial superficial*. <https://www.ncdc.noaa.gov/monitoring-references/faq/anomalies.php>. (Accedido en nov-2020)
- PICIR. (s.f.). *RCP scenario*. <http://www.pik-potsdam.de/~mmalte/rcps/>. (Accedido en nov-2020)
- Roe, G. (2009). Feedbacks, timescales, and seeing red. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, 37, 93–115.
- Sabine, C. L., Feely, R. A., Gruber, N., Key, R. M., Lee, K., Bullister, J. L., ... others (2004). The oceanic sink for anthropogenic CO₂. *Science*, 305(5682), 367–371.
- Santamaría, J. (2010). Forzamiento radiativo y cambios químicos en la atmósfera. *XI Programa de Promoción de la Cultura Científica y Tecnológica. Universidad Complutense de Madrid. Facultad Ciencias Químicas*.
- Williams, R. G., Goodwin, P., Roussenov, V. M., y Bopp, L. (2016). A framework to understand the transient climate response to emissions. *Environmental Research Letters*, 11(1), 015003.
- Xu, M., y Shang, H. (2016). Contribution of soil respiration to the global carbon equation. *Journal of plant physiology*, 203, 16–28.