Una demostración del volumen y la medida superficial de la bola unidad

MARLON JOSUÉ RECARTE

Universidad Nacional Autónoma de Honduras en el Valle de Sula, mail: recarte27@hotmail.com

Recibido: 06 de Febrero de 2016 / Aceptado: 01 de Mayo de 2016

Resumen

In statistical physics it is necesary express some results using the volume of a hypersphere, which is a generalization of a sphere for a dimention larger than three. On the other hand, different models of the shape of the universe has been proposed, particularly some of then consider a curved shape and can be modeled as a hypersphere. In this paper we focus on obtaining the volume and surface measurement of a hypersphere of unit radius often called unit ball.

Keywords: Hypersphere, unit ball

En física estadística a menudo se tiene la necesidad de expresar algunos resultados utilizando el volumen de una hiperesfera, que es una generalización de una esfera para dimensiones mayores a tres. Por otro lado, existen diversos modelos sobre la forma del universo, particularmente algunos consideran una forma curva y dicha forma puede ser modelada como una hiperesfera. En este trabajo nos concentramos en obtener el volumen y la medida superficial de una hiperesfera de radio unitario llamada muchas veces bola unidad.

Palabras claves: Hiperesfera, bola unidad

I. Esfera y bola unidad

Denotemos B^d la bola unitaria en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^d$, definida como:

$$B^d = \left\{x = (x_1, x_2 \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq 1\right\}$$

donde $\|\cdot\|$ denota la norma usual euclídea

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}$$

Denotamos S^{d-1} la esfera unidad,

$$S^{d-1} = \left\{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = 1\right\}$$

Al considerar $d = 1$ la bola unidad es un intervalo, para $d = 2$ se tiene un círculo y para $d = 3$ una esfera, ver figura 1.

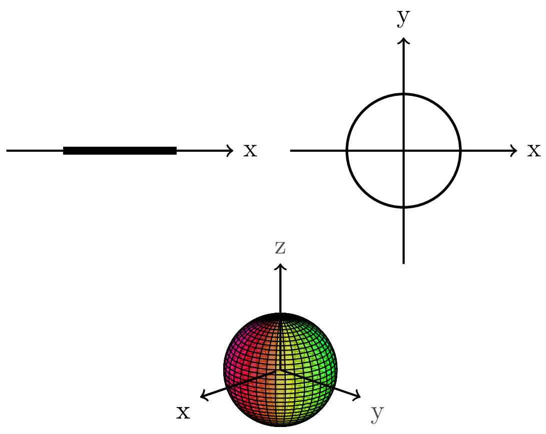

Figura 1: *Bolas unitarias para d=1,2,3.*

A. Área superficial y volumen de la bola unidad

En la literatura existen diversas pruebas para el cálculo del volumen y la medida superficial de la bola unidad (llamada algunas veces la **d**–esfera). El artículo clásico de Blumenson [3] presenta las coordenadas esféricas n-dimensionales o coordenadas polares generalizadas (que presentaremos luego) incluyendo además una deducción de la medida superficial y el volumen a partir de un cambio de variable en dichas coordenadas. Muller [5] presenta una prueba del mismo resultado a partir de una relación de recurrencia. Smith y Vamanamurthy [6] aborda ese problema utilizando múltiples técnicas de cálculo. La demostración que presento en este artículo utiliza el truncamiento de un elemento del espacio euclideo, este tipo de cambio de variable (junto con las propiedades de las funciones Beta y Gamma) es útil en la teoría de polinomios ortogonales multivariables para probar relaciones de ortogonalidad (ver [4]) y [2]).

Consideremos la integral sobre la bola unidad, dicha integral representa el volumen de la **d**-esfera:

$$V_d = \int_{B^d} dV = \int_{B^d} \prod_{j=1}^{d} dx_j$$

Asociado con $x = (x_1, x_2, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ para cada j, definimos $x_{(j)}$, el truncamiento de x, esto es: $x_{(0)} = 0$,

$$x_{(j)} = (x_1, x_2, \cdots, x_j) \text{ para } 1 \leq j \leq d$$

Nótese que $x_{(d)} = x$.

Necesitamos hacer uso de la siguiente fórmula:

$$\int_{B^d} f(x)dx = \int_{B^d} f(x_{(d-1)}, x_d)\ dx$$

Sea $y_i \in \mathbb{R}$ tales que se cumple

$$x_i = y_i \sqrt{1 - \|x_{(i-1)}\|^2}$$

entonces se verifica que:

$$\begin{aligned}
\left(1 - \|x_{(0)}\|^2\right) &= 1 \\
\left(1 - \|x_{(1)}\|^2\right) &= (1 - y_1^2)(1 - y_2^2) \\
\left(1 - \|x_{(3)}\|^2\right) &= (1 - y_1^2)(1 - y_2^2)(1 - y_3^2)
\end{aligned}$$

Aseveramos que

$$\left(1 - \|x_{(d)}\|^2\right) = \prod_{i=1}^{d} (1 - y_i^2)$$

Supongamos que es válido para $i = d - 1$

$$\begin{aligned}
\left(1 - \|x_{(d-1)}\|^2\right) &= \prod_{i=1}^{d-1} (1 - y_i^2) \\
&= \left[(1 - y_{d-1}^2)\left(1 - \|x_{(d-2)}\|^2\right)\right],
\end{aligned}$$

ahora probémoslo para $i = d$:

$$\begin{aligned}
\left(1 - \|x_{(d)}\|^2\right) &= (1 - y_d^2)\left(1 - \|x_{(d-1)}\|^2\right) \\
&= (1 - y_d^2) \prod_{i=1}^{d-1} (1 - y_i^2) \\
&= \prod_{i=1}^{d} (1 - y_i^2)
\end{aligned}$$

Notemos que:

$$\prod_{j=1}^{d} \left(1 - \|x_{(j-1)}\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \prod_{j=1}^{d} (1 - y_j^2)^{\frac{d-j}{2}}.$$

Retomando la integral inicial, tendremos:

$$\begin{aligned}
V_d &= \int_{B^d} \prod_{j=1}^{d} dx_j \\
&= \int_{-1}^{1} \prod_{j=1}^{d} (1 - y_j^2)^{\frac{d-j}{2}} dy_j \\
&= \prod_{j=1}^{d} \int_{-1}^{1} (1 - y_j^2)^{\frac{d-j}{2}} dy_j.
\end{aligned}$$

Al realizar el cambio de variable, $2t = 1 - y_j$

$$\begin{aligned}
V_d &= \prod_{j=1}^{d} \int_{-1}^{1} (1 - y_j^2)^{\frac{d-j}{2}} dy_j \\
&= \prod_{j=1}^{d} \int_{0}^{1} 2^{d-j+1}\ t^{\frac{d-j}{2}} (1 - t)^{\frac{d-j}{2}} dt \\
&= \prod_{j=1}^{d} 2^{d-j+1} \prod_{j=1}^{d} \int_{0}^{1} t^{\frac{d-j}{2}} (1 - t)^{\frac{d-j}{2}} dt.
\end{aligned}$$

La expresión anterior queda en términos la función Beta $\mathcal{B}(a, b)$ que está definida por:

$$\mathcal{B}(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} (1 - t)^{b-1} dt,$$

obteniéndose

$$V_d = \prod_{j=1}^{d} 2^{d-j+1} \prod_{j=1}^{d} \mathcal{B}\left(\frac{d-j}{2} + 1, \frac{d-j}{2} + 1\right)$$

Calcularemos cada producto por separado:

$$\prod_{j=1}^{d} 2^{d-j+1} = \prod_{k=0}^{d-1} 2^{k+1},$$

$$\prod_{j=1}^{d} \mathcal{B}\left(\frac{d-j}{2} + 1, \frac{d-j}{2} + 1\right) = \prod_{k=0}^{d-1} \mathcal{B}\left(\frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 1\right).$$

Usando la relación entre las funciones beta $\mathcal{B}(a, b)$ y gamma $\Gamma(a)$.

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt,$$

$$\mathcal{B}(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a + b)},$$

deducimos que

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{d-1} \mathcal{B}\left(\frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 1\right) &= \prod_{k=0}^{d-1} \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right)\Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right)}{\Gamma(k + 2)} \\
&= \prod_{k=2}^{d+1} \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\Gamma(k)}
\end{aligned}$$

Al usar la fórmula de duplicación de la función gamma (Ver [1])

$$\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\right)=2^{1-k}\sqrt{\pi}\,\Gamma(k),$$

se tiene

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{d-1}\mathcal{B}\left(\frac{k}{2}+1,\frac{k}{2}+1\right)&=\prod_{k=2}^{d+1}\frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\Gamma(k)}\\&=\prod_{k=2}^{d+1}\frac{2^{1-k}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\right)}\\&=\prod_{k=2}^{d+1}2^{1-k}\prod_{k=2}^{d+1}\sqrt{\pi}\prod_{k=2}^{d+1}\frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\right)}\\&=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{d+2}{2}\right)}\prod_{k=2}^{d+1}2^{1-k}\prod_{k=2}^{d+1}\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

Es fácil comprobar que

$$\prod_{k=2}^{d+1}2^{1-k}\prod_{k=0}^{d-1}2^{k+1}=1.$$

Por lo anterior podemos concluir finalmente que

$$V_d=\int_{B^d}\prod_{j=1}^{d}dx_j=\frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d+2}{2}\right)}\tag{1}$$

En la figura 2 observamos el gráfico del volumen de la bola unidad para diferentes dimensiones; notemos que el volumen máximo se obtiene para $d=6$.

Al considerar el comportamiento asintótico de la función gamma (ver [1]) se tiene que $V_d\to 0$ cuando $d\longrightarrow\infty$.

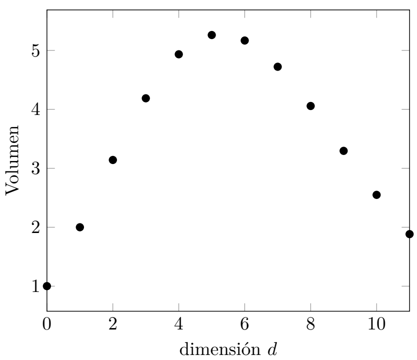

Figura 2: *Gráfico del volumén de la bola unidad para diferentes valores de d.*

Ahora calcularemos la medida superficial de la bola unidad, σ_d.

$$\sigma_d=2\int_{B^{d-1}}\sqrt{1+\sum_{i=1}^{d-1}\left(\frac{dx_n}{dx_i}\right)^2}\prod_{j=1}^{d-1}dx_j$$

Para calcular la integral anterior basta con notar que

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\sum_{i=1}^{d-1}\left(\frac{dx_n}{dx_i}\right)^2}&=\frac{1}{\sqrt{1+\|x_{(d-1)}\|^2}}\\&=\prod_{i=1}^{d-1}(1-y_i^2)^{-1/2}\end{aligned}$$

debido a esto se tiene

$$\begin{aligned}\sigma_d&=2\int_{-1}^{1}\prod_{i=1}^{d-1}(1-y_i^2)^{-\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{d-1}(1-y_j^2)^{\frac{d-1-j}{2}}dy_j\\&=2\prod_{j=1}^{d-1}\int_{-1}^{1}(1-y_j^2)^{\frac{d-j-2}{2}}dy_j\end{aligned}$$

La integral anterior es similar a la que se desarrolló en el cálculo del volumen V_d, entonces si $z=y_{d-1}$

$$\begin{aligned}\sigma_d&=2\prod_{j=1}^{d-1}\int_{-1}^{1}(1-y_j^2)^{\frac{d-j-2}{2}}dy_j\\&=2\int_{-1}^{1}(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}dz\prod_{j=1}^{d-2}\int_{-1}^{1}(1-y_j^2)^{\frac{d-2-j}{2}}dy_j\end{aligned}$$

Al usar (1) se obtiene

$$\sigma_d=2\pi\frac{\pi^{\frac{d-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}=\frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}\tag{2}$$

El gráfico de la medida superficial se muestra en la figura 3.

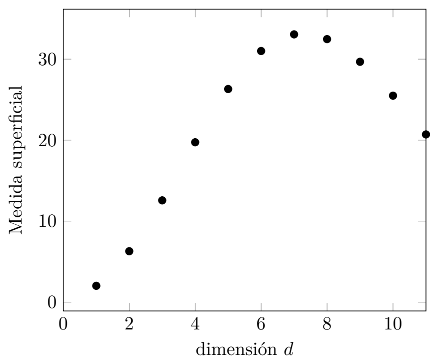

Figura 3: *Gráfico de la medida superficial para diferentes valores de d.*

B. Coordenadas esféricas generalizadas

Sea $x = r\xi$, $\xi \in S^{d-1}$. Se definen las coordenadas esféricas generalizadas como una extensión a las coordenadas polares ($d = 2$) y las coordenadas esféricas ($d = 3$) (ver [3])

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos(\theta_{d-1}), \\ x_2 &= r\sin(\theta_{d-1})\cos(\theta_{d-2}), \\ &\vdots \\ x_{d-1} &= r\sin(\theta_{d-1})\ldots\sin(\theta_2)\cos(\theta_1), \\ x_d &= r\sin(\theta_{d-1})\ldots\sin(\theta_2)\sin(\theta_1), \end{aligned}$$

con $r > 0$, $0 \leq \theta_1 \leq 2\pi$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$ para $2 \leq i \leq d-2$.

Vale la pena comentar que las definiciones para las coordenadas esféricas generalizadas también se pueden expresar como:

$$x_j = \sqrt{r^2 - \|x_{(j-1)}\|^2}\cos(\theta_{d-j})$$

para $j = 1, \ldots, d-1$.

Puede demostrarse que el Jacobiano de esta transformación es igual a

$$J = r^{n-1}\prod_{j=1}^{d-2}\left(\sin\theta_{d-j}\right)^{d-j-1}.$$

Nótese que

$$V_d = \int_{B^d} r^{n-1} dr d\omega,$$

donde

$$d\omega = \prod_{j=1}^{d-2}\left(\sin\theta_{d-j}\right)^{d-j-1} d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_{d-1}.$$

además

$$\sigma_d = \int_{S^{d-1}} d\omega.$$

Puede comprobarse que al utilizar las coordenadas esféricas generalizadas se obtiene el volumen de la d-esfera de radio R

$$V = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d+2}{2}\right)}R^d.$$

Al considerar $R = 1$ se verifica el resultado obtenido en (1).

Referencias

[1] M. ABRAMOWITZ and I. STEGUN. *Handbook of Mathematical functions, 9th. ed.* Dover Publ, New York, 1970.

[2] K. ATKINSON and W. HAN. *Spherical Harmonics and Approximations on the Unit Sphere: An Introduction.* Lecture Notes in Mathematics, New York, 2012.

[3] L. E. BLUMENSON. A derivation of n–dimentional spherical coordinates. *The American Mathematical Monthly. 67*, pages 63–66, January 1960.

[4] F. DAI and Y. XU. *Approximation Theory and Harmonic Analysis on Spheres and Balls.* Springer Monographs in Mathematics, New York, 2013.

[5] C. MULLER. *Spherical Harmonics.* Springer-Verlag, Berlin, 1966.

[6] D. SMITH and M. VAMANAMURTHY. How small is a unit ball? *Mathematics Magazine*, 62(2):101–107, 1989.