Funciones de Bessel y Neumann

Salvador Ávila, Óscar Trigueros y Roberto Chinchilla

Universidad Nacional Autónoma de Honduras

savila@fisicaunah.com otrigueros@fisicaunah.com rchinchilla@fisicaunah.com

Resumen

En este trabajo, trataremos la función Bessel generalizada, que es la solución a la ecuación diferencial de Bessel de segundo orden , originándose del desarrollo de la ecuación de Laplace y la ecuación de Helmholtz en coordenadas cilíndricas y esféricas. Iniciaremos con la función de Bessel de primera clase solución linealmente independiente de la ecuación diferencial de Bessel, usando principios de simetría y condiciones de convergencia, para demostrar su valides. Veremos también las funciones de Bessel de segunda y tercera clase, denominadas respectivamente función de Neumann y la función de Hankel. Las funciones Bessel tienen diversas aplicaciones, como en: ondas electromagnéticas en guías de onda,conducción de calor en objetos cilíndricos, difusión en una red, entre muchas otras.

Palabras clave: Ecuación de Bessel, Función de Bessel primera clase, Función de Neumann, Función de Hankel.

In this paper, we discuss the generalized Bessel function, which is the solution to the Bessel differential equation of second order, resulting in the development of Laplace's equation and the Helmholtz equation in cylindrical and spherical coordinates. We begin with the Bessel function of first kind linearly independent solution of Bessel's differential equation, using principles of symmetry and convergence conditions to demonstrate its validity. We will also see the Bessel functions of second and third class, respectively called Neumann function and Hankel function. The Bessel functions have many applications, such as: electromagnetic waves in waveguides, heat conduction in cylindrical objects spread over a network, among many others.

Keywords: Bessel Equation, Bessel Function first kind, Neumann Function, Hankel Function.

I. Introducción

Friedrich Wilhelm Bessel nació en Minden, Westfalia el 22 de julio de 1784 y falleció de cáncer en Konigsberg (Rusia) el 17 de marzo de 1846. Matemático alemán y astrónomo. Bessel fue un contemporáneo de Carl Gauss.

Era hijo de una empleada domestica y a los 14 años pasó a ser aprendiz en una compañía mercantil de importaciones y exportaciones de Bremen. Ya de pequeño se convirtió en su contable y la confianza en su trabajo lo llevó a cambiar sus habilidades matemáticas a problemas de navegación.

En 1804 calculó la órbita del cometa Halley.

II. Planteamiento

Las funciones de Bessel, primero definidas por el matemático Daniel Bernoulli y más tarde generalizadas por Friedrich Bessel, son soluciones canónicas Z_v de la ecuación diferencial de Bessel:

$$X^2 Z_v'' + X Z_v' (X^2 - V^2) Z_v = 0 \qquad (1)$$

Donde v es un número real o complejo.

Aunque las funciones de Bessel son de interés principal como soluciones de las ecuaciones diferenciales, es importante saber el origen de estas funciones y la forma en se deducen. Se presenta una función de dos variables genera-

Figura 1: *Friedrich Wilhelm Bessel*

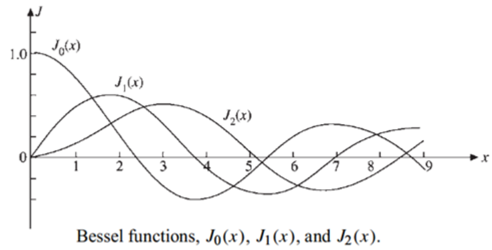

Figura 2: *Funciones de Bessel*

dora de $J_n(x)$:

$$g(x,t) = e^{\left(\frac{x}{2}\right)}\left(t - \frac{1}{t}\right) \tag{2}$$

Ampliando esta función en una serie de Laurent:

$$e^{\left(\frac{x}{2}\right)}\left(t - \frac{1}{t}\right) = \sum_{N=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n \tag{3}$$

Ahora es instructivo comparar si hacemos $t = e_{i\theta}$, se reducen términos y se aplica Euler se tienen expresiones en términos de coeficientes J:

$$\begin{aligned} e^{ix\sin\theta} &= J_0(x) \\ &+ 2\left[J_2(x)\cos 2\theta + J_4(x)\cos 4\theta + \ldots\right] \\ &+ 2i\left[J_1(x)\sin\theta + J_3(x)\sin 3\theta + ...\right] \end{aligned} \tag{4}$$

Estos coeficientes de t^n son definidos como funciones de Bessel de primera especie.
Si trabajamos el lado izquierdo de (3) a un producto de exponenciales, expresando mediante series de Maclaurin en $\frac{xt}{2}$ y $-\frac{x}{2t}$, respectivamente con r y s :
Multiplicando las series:

$$\begin{aligned} e^{\frac{xt}{2}} &= 1 + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)}{1!}\frac{1}{t} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2!}\frac{1}{t^2} + \ldots, \\ e^{-\frac{x}{2t}} &= 1 + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)}{1!}t + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2!}t^2 + \ldots, \\ e^{\frac{xt}{2}} \cdot e^{-\frac{x}{2t}} &= \sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^r \frac{t^r}{r!}, \\ &\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^2\left(\frac{x}{2}\right)^s \frac{t^{-2}}{s!}, \end{aligned} \tag{5}$$

Aquí el índice de r se cambia a n, con $n = r - s$ y el límite de la suma $n = -s$ hasta ∞, y el orden de la suma se intercambia, que se justifica por la absoluta convergencia. El rango de la sumatoria sobre n se convierte en $-\infty$ hasta ∞, mientras que la sumatoria sobre s se extiende desde (−n,0) hasta ∞. Para un s dado tenemos que ($t^n > 0$), $r = n + s$:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{n+s} \frac{t^{n+s}}{(n+s)!}(-1)^s \frac{t^{-s}}{s!} \tag{6}$$

Los coeficientes de t^n son:

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(n+s)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}, \\ &= \frac{x^n}{2^n n!} - \frac{x^{n+2}}{2^{n+2}(n+1)!} + \ldots, \end{aligned} \tag{7}$$

Esta ecuaciòn nos da la forma de la funciòn de Bessel $J_n(x)$ para x pequeños.
Para $n < 0$:

$$J_{-n}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-s)^s}{s!(s-n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s-n} \tag{8}$$

Ahora $J_n(x)$ y $J_{-n}(x)$ no son independientes y se relacionan por:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \tag{9}$$

I. Relaciones de recurrencia

Si derivamos ambos lados de la ecuación 2:

$$\frac{\partial}{\partial t}g(x,t) = \frac{1}{2}x\left(1+\frac{1}{t^2}\right)e^{\left(\frac{x}{2}\right)\left(t-\frac{1}{t}\right)},$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} nJ_n(x)t^{n-1}, \qquad (10)$$

Y sustituyendo la ecuación 3 para las exponenciales e igualando los coeficientes de potencias como t, obtenemos:

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}J_n(x) \qquad (11)$$

Esta es una relación de recurrencia para tres términos. Dada J_0 y J_1, por ejemplo; J_2 y cualquier otro para J_n se obtiene diferenciando la ecuación 2 con respecto a x:

$$\frac{\partial}{\partial x}g(x,t) = \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)e^{\left(\frac{x}{2}\right)\left(t-\frac{1}{t}\right)},$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^{'}(x)t^{n}, \qquad (12)$$

Una vez mas sustituimos la ecuación 3 e igualamos los coeficientes de potencias como t, obtenemos:

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J_n^{'}(x) \qquad (13)$$

Como caso especial de la relación general de recurrencia:

$$J_0^{'}(x) = -J_1(x) \qquad (14)$$

Adicionando las ecuaciones 11 y 13, y dividiendo entre 2 se tiene:

$$J_{n-1}(x) = \frac{n}{x}J_n(x) + J_n^{'}(x) \qquad (15)$$

Multiplicando por x^{-n} y reordenando términos:

$$\frac{d}{dx}[x^{-n}J_n(x)] = -x^{-n}J_{n+1}(x) \qquad (16)$$

Ejemplo 1 Hallar $\frac{d}{dx}[x^2J_3(2x)]$ en términos de funciones de Bessel. Solución

$$\frac{d}{dx}[x^2J_3(2x)] = 2xJ_3(2x) + x^2\cdot 2J_3^{'}(2x)$$

Usando la ecuación 15

$$J_{n-1}(x) = \frac{n}{x}J_n(x) + J_n'(x)$$

Con $n = 3$ y $2x$ en lugar de x queda:

$$\frac{3}{2x}J_3(2x) + J_3'(2x) = J_2(2x)$$
$$\Rightarrow J_3'(2x) = J_2(2x) - \frac{3}{2x}J_3(2x)$$

Sustituyendo $J_3'(2x)$, se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[x^2J_3(2x)] =& 2xJ_3(2x)\\ &+ 2x^2[J_2(2x) - \frac{3}{2x}J_3(2x)],\\ =& 2x^2J_2(2x) - xJ_3(2x),\end{aligned}$$

II. Funciones de Neumann

También llamadas funciones de Bessel de segunda especie, de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias se sabe que la ecuación de Bessel tiene dos soluciones independientes.
En efecto para términos de orden entero v hemos encontrado dos soluciones linealmente dependientes $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ usando la serie infinita, (ecuacion 7). El problema es cuando ambas soluciones son linealmente independientes, para este efecto se introduce un nueva función conocida como Funcion de Neumann $N_\nu(x)$:

$$N_\nu(x) = \frac{\cos\nu\pi J_\nu(x) - J_\nu(x)}{\sin\nu\pi} \qquad (17)$$

Para ν no entero $N_\nu(x)$ satisface claramente la ecuación de Bessel.

III. Función de Hankel

También llamada función de Bessel de tercera especie, que es una función de factores linealmente independientes compuesta por una parte real (Función de Bessel de primer especie) y parte imaginaria (Función de Neumann). Las funciones de Hankel de primera y segunda especie son usadas para representar las soluciones de ondas entrantes y salientes de una ecuación de ondas en simetrías cilíndricas respectivamente, dependiendo el signo de la frecuencia. Como ya hemos obtenido la función de Neumann por técnicas más elementales, la usaremos para definir la función de Hankel $H_\nu^{(1)}(x)$ y $H_\nu^{(2)}(x)$:

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x) \tag{18}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x) \tag{19}$$

Esto es exactamente análogo a la expresión

$$e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$$

Para un argumento real $H_\nu^{(1)}(x)$ y $H_\nu^{(2)}(x)$ son complejos conjugados. La extensión de la analogía parece ser mejor cuando la forma asintótica es considerada, en efecto, es su comportamiento asintótico lo que hace a la función de Hankel útil.
Se puede de obtener la expansión en serie de $H_\nu^1(x)$ y $H_\nu^2(x)$ usando las expresiones:

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(n+s)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}, \\ &= \frac{x^n}{2^n n!} - \frac{x^{n+2}}{2^{n+2}(n+1)!} + \ldots, \end{aligned}$$

y

$$\nu!(-\nu)! = \frac{\pi\nu}{\sin\pi\nu}$$

Es muy común que solo el primer término sea de interés:

$$\begin{aligned} H_0^{(1)}(x) &\approx i\frac{2}{\pi}\ln x + 1 + i\frac{2}{\pi}(\alpha - \ln 2) + \ldots \\ H_\nu^{(1)}(x) &\approx -i\frac{(\nu-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu + \ldots, \quad \nu > 0, \\ H_0^{(2)}(x) &\approx -i\frac{2}{\pi}\ln x + 1 - i\frac{2}{\pi}(\alpha - \ln 2) + \ldots \\ H_\nu^{(1)}(x) &\approx -i\frac{(\nu-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu + \ldots, \quad \nu > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{\nu-1}(x) + H_{\nu+1}(x) &= \frac{2\nu}{x}H_\nu(x) \\ H_{\nu-1}(x) - H_{\nu+1}(x) &= 2H'_\nu(x) \end{aligned}$$

Desde que la función de Hankel es una combinación lineal (con coeficientes constates) de la función de Bessel de primera especie y la función de Neumann, satisface la relación de recurrencia :
Para ambos $H_\nu^{(1)}(x) + H_{(2)}\nu(x)$
Una variedad de fórmulas Wrosquianas pueden ser desarrolladas.

$$\begin{aligned} H_\nu^{(2)}H_{\nu+1}^{(1)} - H_\nu^{(1)}H_{\nu+1}^{(2)} &= \frac{4}{i\pi x} \\ J_{\nu-1}H_\nu^{(1)} - J_\nu H_{\nu-1}^{(1)} &= \frac{2}{i\pi x} \\ J_\nu H_{\nu-1}^{(2)} - J_{\nu-1}^{(2)} &= \frac{2}{i\pi x} \end{aligned}$$

III. Conclusiones

- La funciòn de Bessel es la soluciòn de la ecuaciòn de Laplace y de Helmholtz en coordenadas cilindricas.
- La funciòn de Neumann es una combinaciòn lìneal de la funciòn de Bessel
- La funciòn de Hankel es una combinaciòn de la funciòn de Bessel, como su parte real y la funciòn de Neumann como su parte imaginaria:

$$N_\nu(x) = \frac{\cos\nu\pi J_\nu(x) - J_\nu(x)}{\sin\nu\pi}$$

Referencias

[1] Arfken and Weber. *Mathematical Methods for physicists.* Elseive Academy, 2005.

[2] David J. Griffiths. *Introduction to Quantum Mechanics.* Second Edition.

[3] J. D. Jackson. *Electrodinámica Clásica.* John Wiley, 1998.