Algunas Soluciones para las ecuaciones de Campo de La Cosmología Estándar

Javier Sánchez Villanueva

Universidad Nacional Autónoma de Honduras
Facultad de Ciencias
Escuela de Física
rokapier@gmail.com

Resumen

Here we study how our universe starts in the big bang and then evolves into an open universe, closed, or flat depending on the constant curvature κ, the cosmological constant Λ, this constant should fulfill the role of repulsive force and the Hubble constant [5, 6]. The theory of general relativity seems to represent the only consistent way to address the problem of cosmology. Due to the Cosmological principle, we assume the universe is homogeneous and isotropic, we assume, in addition, we can characterize its contents like a perfect fluid, so that at scales large enough (greater than the distance furnishing between galaxies) we have defined a density ρ and pressure p. The equation of state $p = p(\rho)$ determines the type of fluid. The universe can be composed of different fluids $\rho = \rho_1 + \rho_2 + \ldots$, each one with different equations of state [3].

Keywords: Big Bang theory, curvature constant, cosmological constant, redShift, general relativity, cosmological principle

Aquí estudiaremos como nuestro universo comienza en el big bang y luego evoluciona hacia un universo abierto, cerrado, o plano dependiendo de la costante de curvatura κ, de la constante cosmológica Λ, que cumple con el papel de fuerza igual y opuesta a la fuerza gravitatoria, y de la constante de Hubble H_0[5, 6]. La teoría General de la Relatividad parece representar la única forma consistente de abordar el problema de la cosmología. Debido al principio cosmológico, asumimos que el universo es homogéneo e isótropo, vamos a suponer, además, que podemos caracterizar su contenido como si fuera un fluido perfecto, de manera que a escalas suficientemente grandes (mayores que la distancia típica entre galaxias) tenemos definida una densidad ρ y presión p. La ecuación de estado $p = p(\rho)$ determina el tipo de fluido. El universo puede estar compuesto de diferentes fluidos $\rho = \rho_1 + \rho_2 + \ldots$, cada uno con diferentes ecuaciones de estado [3].

Keywords: Teoría del Big Bang, constante de curvatura, constante cosmológica, corrimiento hacia el rojo, teoría general de la relatividad, principio cosmológico

I. Clasificación del universo FRW

El universo Friedmann-Robertson-Walker (FRW) está descrito por la métrica

$$\begin{aligned} ds^2 =& dt^2 - a^2(t)\frac{dr^2}{1-\kappa r^2} \\ & - a^2(t)\left(r^2\left(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2\right)\right), \end{aligned} \quad (1)$$

donde κ es la curvatura del universo, y tiene valores de $-1, 0, 1$ dependiendo si el universo es abierto, plano, o cerrado, respectivamente, ver Figura 1. a(t) es el factor de escala.

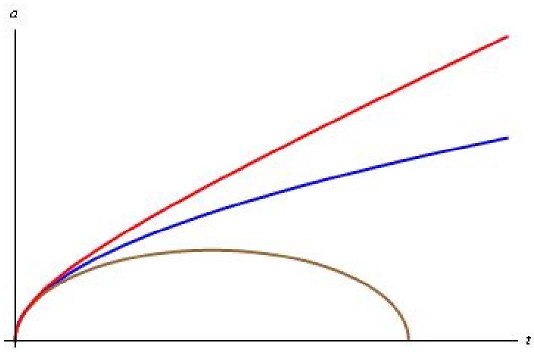


Figura 1: *universo abierto, plano y cerrado*

El factor de escala a(t) se determina a través de las ecuaciones de campo de Einstein.

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ab}, \tag{2}$$

donde T_{ab} es el tensor de Energía-Momento [1]. Para un fluido perfecto:

$$T_{ab} = (\rho + p)\, u_a u_b - p g_{ab} \tag{3}$$

donde $u_a = \delta_a^t$ es el cuadrivector velocidad del fluido [1, 2, 7].
Al resolver las ecuaciones 2 y 3 obtenemos la ecuación de Friedmann,

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\kappa}{a^2} \tag{4}$$

y de la conservación del tensor Energía-Momento, $\nabla^a T_{ab} = 0$, obtenemos la ecuación [2]

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \tag{5}$$

donde

$$H = \frac{\dot{a}}{a}$$

De 4 y 5 observamos que tenemos tres parametros desconocidos a, ρ y p pero solamente dos ecuaciones independientes, entonces para cerrar el sistema necesitamos otra ecuación, generalmente está dada por la ecuación de estado:

$$p = \omega\rho \tag{6}$$

donde ω es una constante real arbitraria.

[1] T_{ab} significa el flujo de p^a a través de la superficie $x^b = constante$

De las componentes espaciales de las ecuaciones de Einstein y de 4 podemos obtener la ecuación

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \tag{7}$$

introduciendo 6 en 5 nos dá la solución;

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+\omega)} \tag{8}$$

donde ρ_0 es la densidad de energía cuando $a = a_0$ y asumimos que $\rho_0 > 0$ [2, 4, 6].
El caso de materia (sin presión) corresponde a $\omega = 0$, mientras que el caso de presión de radiación $\omega = 1/3$. El caso $\omega = -1$ o $p = -\rho$ corresponde a la constane cosmológica [2][2, 3].

II. Materia relativista

La ecuación para la época dominada por la radiación es

$$p = \frac{1}{3}\rho \tag{9}$$

que es la ecuación de estado para un gas de partículas relativista. Sustituyendo esta ecuación en 5 obtenemos:

$$\dot{\rho} + 4\rho\frac{\dot{a}}{a} = 0 \tag{10}$$

de donde

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -4\frac{\dot{a}}{a}, \tag{11}$$

entonces

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 \tag{12}$$

En el caso de energía (o materia) relativista $\rho = E/c^2$, la densidad de energía (por ejemplo de radiación, ρ_γ) sufre una dilución en un factor a adicional debido a que la onda asociada también se expande (redshift cosmológico). En el caso de la densidad de energía de radiación:

$$\rho_\gamma(t) = \rho_\gamma(t_0)\left(\frac{a_0}{a}\right)^4$$

Debido a la expansíon, el número de fotones disminuye con el volumen a^{-3} y además, cada fotón pierde un factor a^{-1} de energía debido al redshift cosmológico. Esto nos lleva a que el universo primitivo era más denso y debía estar dominado por radiacíon [2, 3].

[2] En todo esto tomamos $c = 1$ (velocidad de la luz)

III. Materia no relativista

Esta es la época actual, en que la mayor parte de la energía está en la masa de las partículas nucleares. Para esta época, la presión es muy pequeña y la ecuación de estado es entonces

$$p = 0 \tag{13}$$

Substituyendo en la ecuación 5

$$\dot{\rho} + 3\rho\frac{\dot{a}}{a} = 0 \tag{14}$$

de donde

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a} \tag{15}$$

entonces

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \tag{16}$$

nos dice que la densidad de materia disminuye con el volumen a medida que el universo se expande, de manera que la cantidad total de masa se conserva [2, 3].

IV. Aceleración cósmica

Consideremos en caso general $\rho(a) = \rho_0 a^{-\gamma}$ (para $\gamma = 4$ en (12) y $\gamma = 3$ en 16):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho_0 a^{-\gamma}}{3} - \frac{\kappa}{a^2} \tag{17}$$

derivando con respecto a t, tenemos la aceleración cósmica:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -(\gamma - 2)\frac{4\pi G\rho(a)}{3}, \tag{18}$$

independientemente del valor de la curvatura κ. La interpretación es clara: la expansión debe ser desacelerada, puesto que la densidad disminuye con la expansión: $\gamma > 3$. Se define el parametro de desaceleración como menos la acelaración en unidades adimencionales:

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = \frac{1}{2}\Omega_m - \Omega_\Lambda. \tag{19}$$

y se denomina q_0 a su valor hoy en día [2, 3, 6].

V. Energía oscura

La utilización de las supernovas tipo Ia (SNIa) como candelas estandares, parece indicar que la expansión del universo es acelerada. Esto se puede conseguir de la ecuación 18 si $\gamma < 2$. Estos valores de γ no corresponden a ningun tipo de materia o energía ordinaria, por lo que se denomina energía oscura. La constante cosmológica, Λ, introducida por Einstein en sus ecuaciones de la relatividad para evitar la expansión del universo, correspondería aquí a un término con $\gamma = 0$, es decir a una densidad de energía que se mantiene constante $\rho(a) = \rho_\Lambda = \Lambda/8\pi G$, a pesar de la expansión del universo. Esto es justamente lo que uno esperaría si el vacío tuviera energía(y por tanto gravitara). La expansión del espacio crea vacío, si este tiene energía (por ejemplo debido a las fluctuaciones cuánticas del vacío) ρ se hace constante. Por más pequeño que sea el valor de ρ_Λ este siempre termina dominando ρ. Consideremos las diferentes contribuciones a ρ:

$$\rho = \rho_m \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \rho_\gamma \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \rho_\Lambda, \tag{20}$$

donde los valores ρ_m y ρ_γ corresponden al valor hoy en día ($a_0 = 1$). En el pasado ($a \to 0$), vemos que ρ estará dominado por la radiación, ρ_γ, mientras que el futuro ($a \to \infty$), ρ_Λ domina. Si la interpretacíon de las observaciones de la SNIa es correcta, el valor de ρ_Λ es tal que domina sobre el valor actual de ρ_m. Un universo plano y sin constante cosmológica se conoce como universo de Einstein-deSitter o EdS [3].

VI. Parametros cosmológicos

Vamos a reescribir la ecuación de Hubble, para ello vamos a considerar ρ 20 en 4. Podemos introducir la siguiente notación:

$$\Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_c} = \frac{8\pi G\rho_m}{3H_0^2}, \tag{21}$$

que es el cociente entre el valor actual de la densidad de materia y la densidad crítica:

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \tag{22}$$

De igual manera podemos definir los parametros de curvatura y densidad de vacío (o constante cosmológica):

$$\Omega_\gamma = \frac{\rho_\gamma}{\rho_c}, \tag{23}$$

$$\Omega_\kappa = -\frac{\kappa}{H_0^2}, \tag{24}$$

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2} \tag{25}$$

Con todo ello reescribimos el parametro de Hubble como función de a [3, 6]:

$$\begin{aligned} H^2 =& H_0^2 \left(\Omega_m \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \right) \\ &+ H_0^2 \left(\Omega_\gamma \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_\kappa \frac{1}{a^2} + \Omega_\Lambda \right). \end{aligned} \tag{26}$$

donde $H_0 = 71 Km/s/Mpc$ [5]

VII. Algunas soluciones para a(t)

Podemos integrar la ecuación de Friedmann en su forma más general, teniendo en cuenta que $\dot{a}/a = da/dt/a = H(a)$, de forma que $dt = da/a/H(a)$,

$$\int_0^t dt = \int_0^a \frac{da}{aH(a)} \tag{27}$$

donde los límites de integración van desde el inicio ($t = 0$ y $a = 0$) hasta un tiempo t que asignamos a un factor de escala a. Lo que queremos es encontrar la función $a = a(t)$. Sustituyendo 26 en 27:

$$\begin{aligned} &H_0 t \\ &= \int_0^a \frac{da}{a\sqrt{\Omega_m \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_\gamma \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \frac{\Omega_\kappa}{a^2} + \Omega_\Lambda}} \end{aligned} \tag{28}$$

La solución a tiempos pequeños $a \to 0$ es la de un universo dominado por radiación con $\Omega_\kappa = \Omega_\Lambda = 0$ y $\Omega_\gamma = 4.8 \times 10^{-5}$

$$a(t) = a_0 \sqrt{2tH_0\sqrt{\Omega_\gamma}} \tag{29}$$

ver Figura 2 [2, 3].

Con $\Omega_\gamma = 4.8 \times 10^{-5}$, $\Omega_\Lambda = 0$ y $\Omega_\kappa = \mp 1/H_0^2$, donde $\kappa = \pm 1$, un universo cerrado o abierto.

$$H_0 t = \int_0^a \frac{da}{a\sqrt{\Omega_\gamma \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_\kappa \frac{1}{a^2}}} \tag{30}$$

cuya solución es:

$$a(t) = \sqrt{\frac{\left(H_0 t \Omega_\kappa + \sqrt{\Omega_\gamma} a_0^2\right)^2 - \Omega_\gamma a_0^4}{\Omega_\kappa}} \tag{31}$$

Ver Figura 2 [2, 3].
Para un universo dominado por radiación con constante cosmológica $\Omega_\Lambda = 0.73$, ver Figura 2.
En estas soluciones, debido a que las unidades de H_0 son $Km/s/Mpc$, $t = 1$ equivale a 9.78×10^{11} años, o sea que debemos multiplicar t por 9.78×10^{11} años [5].

Para un universo dominado por la materia ($p = 0$) necesitamos utilizar la ecuación 7 con $p = 0$, que es más fácil de resolver, la ecuación 20 sin el término ρ_γ y obtenemos:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \frac{1}{3}\Lambda \tag{32}$$

introduciendo los parámetros adimencionales:

$$Y = \frac{a}{a_0} \tag{33}$$

con $Y_0 = 1$

$$X = H_0 t \tag{34}$$

con $X_0 = 0$.
Por ejemplo, $X = 2.46$ significa 3.40×10^{10} años en el futuro, mientras que $X = -0.46$ corresponde a un evento ocurrido hace 6.34×10^9 años.
Se puede demostrar con 33 y 34 que $Y_0' = 1$, donde $Y = Y(X)$.
Con 19 (con $q = q_0$ para valores actuales), 21 (con $\rho_m = \rho_0$ para valores actuales), 25, 33 y 34 se puede llegar a la siguiente expresión

$$Y'' = -\frac{\Omega_m}{2Y^2} + \Omega_\Lambda Y \tag{35}$$

que es una ecuación bastante simple. otra ventaja es el hecho que la constante de Hubble

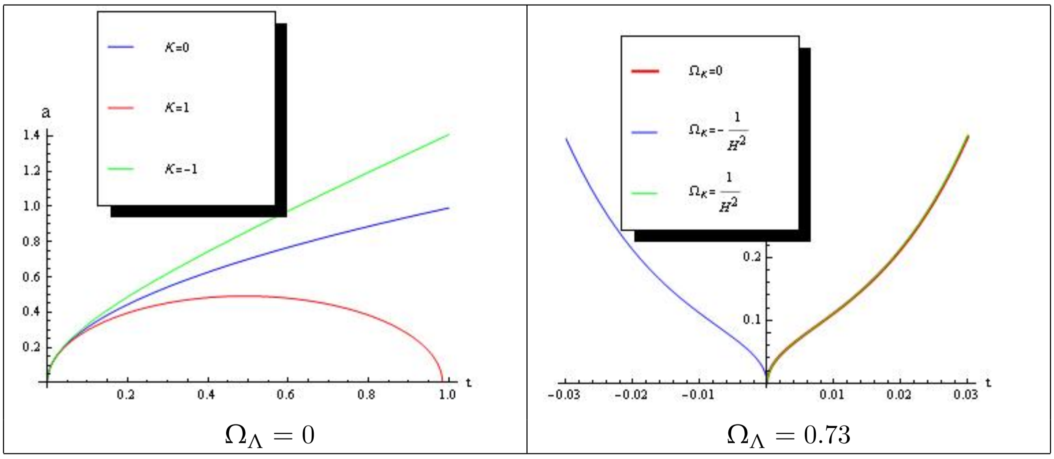


Figura 2: *Universo dominado por radiación*

ha desaparesido de la ecuación, lo cual la hace independiente de su valor exacto.

Necesitamos resolver 35 con métodos numéricos. El calculo en si tiene dos partes. Primero comenzamos de $X_0 = 0$ con la condición inicial $Y_0 = 1$ y $Y_0' = 1$, el futuro lo analizamos con pasos de tiempo DX positivos, mientras que el pasado lo analizamos con pasos de tiempo negativos. Analizamos el pasado y el futuro de las mismas condiciones iniciales, una pequeña trancisión en $X = 0$ se garantiza. LLamemos a la derivada de Y simplemente $Z = Y'$. En este caso Z se puede considerar como la velocidad de expanción del universo. La ecuación de segundo orden se transforma entonces en un sistema de dos ecuaciones de primer orden que se puede resolver fácilmente. Comenzando de un punto (X_i, Y_i), el siguiente punto $i + 1$ se analiza como sigue:

Primero

$$X_{i+1/2} = X_i + 0.5DX \tag{36}$$

$$Y_{i+1/2} = Y_i + 0.5DXZ_i \tag{37}$$

$$Z_{i+1/2} = Z_i + 0.5DX\left(\Omega_\Lambda Y_i - \frac{\Omega_m}{2Y_i^2}\right) \tag{38}$$

luego

$$X_{i+1} = X_i + DX \tag{39}$$

$$Y_{i+1} = Y_i + DXZ_{i+1/2} \tag{40}$$

$$Z_{i+1} = Z_i + DX\left(-\frac{\Omega_m}{2Y_{i+1/2}^2} + \Omega_\Lambda Y_{i+1/2}\right) \tag{41}$$

comenzando de $X_0 = 0$, $Y_0 = 1$ y $Z_0 = 1$.

El paso de tiempo que utilizamos aquí es 0.02 o -0.02.

Para saber el tipo de curvatura hacemos

$$\kappa = signo\left(\Omega_m + \Omega_\Lambda - 1\right)$$

Si esta cantidad es cero, positiva, o negativa, κ será igual a $0, +1$, o -1 [5]

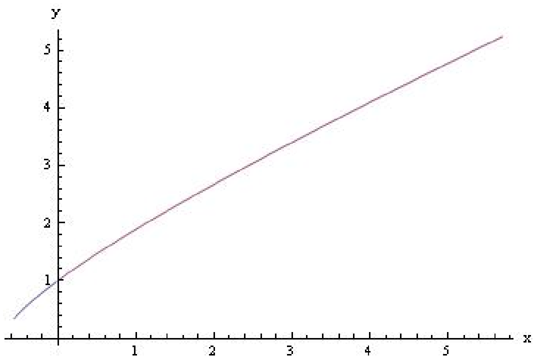
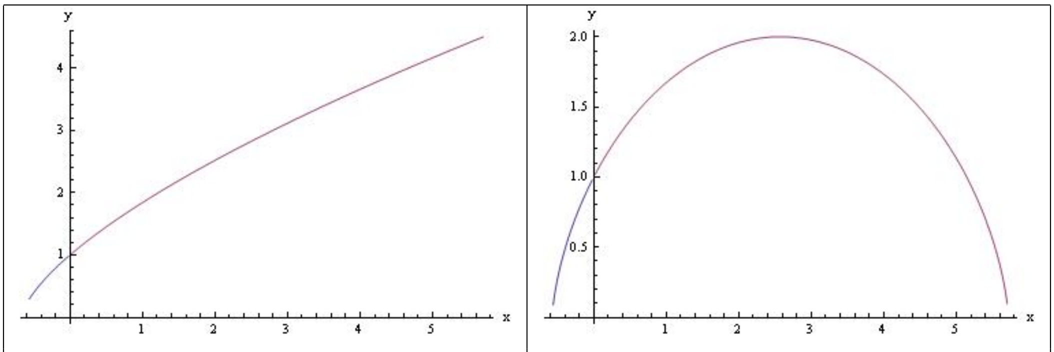


Figura 4: *universo abierto con $\Omega_\Lambda = 0$, $\Omega_m = 0.7$*

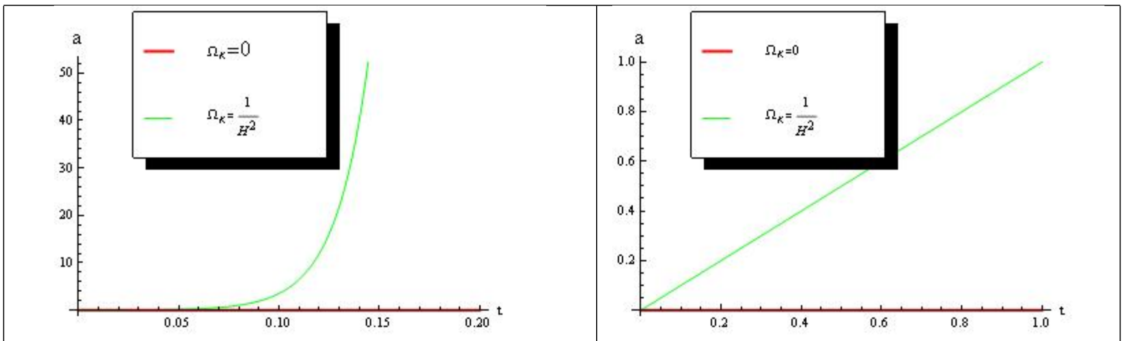
VIII. Universo Plano y $E = 0$

¿Porqué en relatividad general (RG) el caso $E = 0$ corresponde a un universo plano? De acuerdo con el principio de equivalencia podemos expresar los efectos de la gravedad como



Plano con $\Omega_\Lambda = 0$ y $\Omega_m = 1$ | Cerrado con $\Omega_\Lambda = 0$ y $\Omega_m = 2$

Figura 3: *Universo dominado por materia*



$\Omega_\Lambda = 0.73$, $\Omega_m = \Omega_\gamma = \Omega_\kappa = 0$ y $\Omega_\kappa = 1/H_0^2$ | $\Omega_\Lambda = \Omega_m = \Omega_\gamma = \Omega_\kappa = 0$ y $\Omega_\kappa = 1/H_0^2$

Figura 5: *Universo dominado por materia*

transformaciones geométricas, de manera que ambas descripciones son equivalentes. La presencia de materia se traduce en una curvatura del espacio. Cualquier forma de energía gravita y por tanto deforma la geometría del espacio y crea curvatura.

Para conseguir un espacio plano $\kappa = 0$ necesitamos por tanto que la energía total sea $E = 0$. Dado que sabemos que existe materia y radiación en el universo, ¿Cómo es posible que $E = 0$?. La forma de conseguirlo es compensando exactamente esta energía gravitatoria (negativa) con la energía cinética debida a la expansión cósmica [3]. En cierto sentido, se puede pensar que la expansión cósmica es una consecuencia necesaria para poder tener un universo plano con materia.

[3]Considerar el papel que juega aquí la energía debida a la masa de las partículas

IX. Potencial cosmológico

De la conservación de la energía cinética y potencial en mecánica clásica, podemos aplicarla al estudio de algunos modelos cosmológicos del universo. En mecánica clásica tenemos, que para una partícula de masa m que se mueve en un potencial $V(x)$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = E \tag{42}$$

donde $\dot{x} = dx/dt$ y E es la energía total del sistema, que se conserva sin alguna fuerza externa.

Para la ecuación anterior, con $m = 1$, $E = 0$, $x(t) = a(t)$, tenemos

$$\frac{1}{2}\dot{a}^2 + V(a) = 0 \tag{43}$$

sustituyendo esto en 26 encontramos que

$$V(a) = -\frac{1}{2}H_0^2\left(\Omega_m\frac{a_0^3}{a}\Omega_\gamma\frac{a_0^4}{a^2}\right) + \left(\Omega_\kappa + \Omega_\Lambda a^2\right) \quad (44)$$

Derivando 43 con respecto al tiempo encontramos que [4]

$$\ddot{a} = -\frac{dV(a)}{da} \quad (45)$$

Por ejemplo, para un universo dominado por la radiación,

$$V(a) = -\frac{1}{2}H_0^2\Omega_\gamma\frac{a_0^4}{a^2} \quad (46)$$

$$\ddot{a} = -H_0^2\Omega_\gamma\frac{a_0^4}{a^3} \quad (47)$$

De la ecuación 47 y la Figura 6 que muestra el potencial para este caso, se ve que la aceleración es negativa e igual a cero cuando $a \to \infty$, esto significa que el universo se está desacelerando.
Para un universo dominado por la radiación con constante cosmológica,

$$V(a) = -\frac{1}{2}H_0^2\left(\Omega_\gamma\frac{a_0^4}{a^2} + \Omega_\Lambda a^2\right) \quad (48)$$

$$\ddot{a} = -H_0^2\Omega_\gamma\frac{a_0^4}{a^3} + H_0^2\Omega_\Lambda a \quad (49)$$

EL universo se desacelera hasta una cantidad $a = a_0\sqrt[4]{\frac{\Omega_\gamma}{\Omega_\Lambda}} \simeq 0.09$, y luego comienza a acelerar [4, 5]. (Ver Figura 6).

X. Conclusiones

Hemos estudiado sistemáticamente las soluciones del universo de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) con la constante cosmológica y un fluido perfecto que tiene como ecuación de estado $p = \omega\rho$, donde p y ρ denotan, respectivamente, la presión y la densidad de energía del fluido y ω es una constante real arbitraria.

Hemos estudiado la métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), el tensor de energía-momento y las ecuaciones de campo de Einstein sin dar demostraciones de como se derivan, pero si resolviendolas para encontrar las diferentes soluciones del factor de escala que vendría a ser el tamaño del universo.

Se ha reescrito el parametro de Hubble en función de parametros adimensionales que representan las diferentes eras del universo, primeramente la era dominada por la radiación, luego la era dominada por la materia y la era dominada por la constante cosmológica. En el caso del universo dominado por la materia hemos utilisado la ecuación 7 por ser más facil de resolver e introduciendo parametros adimensionales resultando una ecuación independiente de la constante de Hubble.

Escribiendo el movimiento del universo en la forma 42, hemos sido capaces de clasificar algunas soluciones para el potencial cosmológico haciendo $m = 0$, por conveniencia, y $E = 0$, simplemente estudiando el conocimiento del movimiento unidimensional en mecánica clásica.

Las soluciones tratadas aquí se pueden ver en las diferentes figuras. Algunos casos particulares ya han sido discutidos en varios textos.

Referencias

[1] S. K. Bose. *An Introduction to General Relativity.* John Wiley and sons, Indiana, 1980.

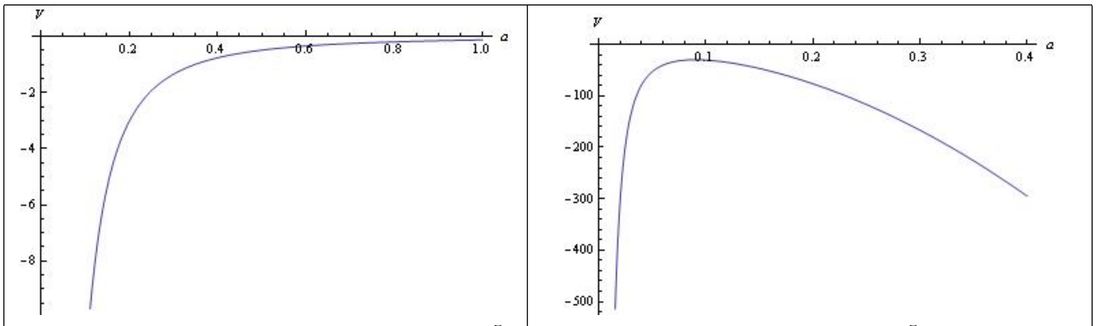
[2] Erica Ivonne Zavala Carrasco. Dinamica del campo escalar en cosmolog'ia. 1998.

[3] E. Gasta'naga. Apuntes de cosmolog'ia.

[4] Te Ha, Yongqing Huang, Qianyu Ma, Kristen D. Pechan, Timothy J. Renner, Zhenbin Wu, and Anzhong wang. Classification of the **FRW** universe with a cosmological constant and a perfect fluid of the equation of state $p = w\rho$. May 4, 2009.

[5] Paul Hellings. *Astrophysics with a PC, An Introduction to Computational Astrophysics.* Willmann-Bell, Richmond, December 1, 1994.

[6] Malcolm S. Longair. *Galaxy Formation.* Springer, United Kingdom, 1998.



$\Omega_\Lambda = \Omega_m = \Omega_\kappa = 0$ y $\Omega_\gamma = 4.8 \times 10^{-5}$ | $\Omega_m = \Omega_\kappa = 0$, $\Omega_\gamma = 4.8 \times 10^{-5}$ y $\Omega_\Lambda = 0.73$

Figura 6: *Potencial Cosmológico*

[7] A. K. Raychaudhuri, S. Banerji, and A. Banerjee. *General Relativity, Astrophysics, and Cosmoligy.* Springer, India, 1992.